Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
©Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 6

Bei der Lösung der **Anfangsrandwertaufgabe** der Wärmeleitungsgleichung in zwei Raumdimensionen ($n = 2$) mit homogener Differentialgleichung und homogenen Randbedingungen

$$\begin{array}{llll} u_t & = \Delta u & \text{für} & (x,y) \in]0,a[\times]0,b[\,, \quad 0 < t\,, \\ u(0,y,t) & = 0 = u(a,y,t) & \text{für} & y \in [0,b]\,, \quad 0 \le t\,, \\ u(x,0,t) & = 0 = u(x,b,t) & & x \in [0,a]\,, \quad 0 \le t\,, \\ u(x,y,0) & = u_0(x,y) & \text{für} & (x,y) \in [0,a] \times [0,b] \end{array}$$

führt der Produktansatz $u(x,t) = X(x)Y(y)T(t)$ eingesetzt in die Differentialgleichung $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ auf

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} =: -\lambda \ = (\text{konst})\,.$$

Für T erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$T' + \lambda T = 0\,.$$

Nach weiterer Trennung ergeben sich gewöhnliche Differentialgleichungen in X und Y

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\mu \ = (\text{konst})\,.$$

Die Randbedingungen

$$\begin{array}{l} 0 = u(0,y,t) = X(0)Y(y)T(t)\,, \quad 0 = u(a,y,t) = X(a)Y(y)T(t)\,, \\ 0 = u(x,0,t) = X(x)Y(0)T(t)\,, \quad 0 = u(x,b,t) = X(x)Y(b)T(t) \end{array}$$

liefern $X(0) = 0 = X(a)$ und $Y(0) = 0 = Y(b)$.

Die gewöhnliche Randeigenwertaufgabe in X

$$X''(x) + \mu X(x) = 0 \quad \text{mit} \quad X(0) = 0 = X(a)$$

besitzt nur nichttriviale Lösungen für $\mu > 0$

$$X(x) = c\cos(\sqrt{\mu}x) + d\sin(\sqrt{\mu}x)\ .$$

Einsetzen der Randwerte $X(0) = 0 = X(a)$ ergibt die Eigenwerte μ.

Die gewöhnliche Randwertaufgabe in Y

$$Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0 \quad \text{mit} \quad Y(0) = 0 = Y(b)$$

besitzt nur nichttriviale Lösungen für $\lambda - \mu > 0$

$$Y(y) = e\cos(\sqrt{\lambda - \mu}y) + f\sin(\sqrt{\lambda - \mu}y)\ .$$

Einsetzen der Randwerte $Y(0) = 0 = Y(b)$ ergibt die Eigenwerte $\lambda - \mu$.

Aufgabe 21:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$\begin{array}{rlll}
u_t & = & \Delta u & \text{für} \quad (x,y) \in\,]0,\pi[\, \times\,]0,\pi[\ ,\ 0 < t\ , \\
u(0,y,t) & = 0 & = u(\pi,y,t) & \text{für} \quad y \in\ [0,\pi]\ ,\ 0 \le t\ , \\
u(x,0,t) & = 0 & = u(x,\pi,t) & \quad\quad x \in\ [0,\pi]\ ,\ 0 \le t\ , \\
u(x,y,0) & = & 5\sin 3x \sin 4y & \text{für} \quad (x,y) \in\ [0,\pi] \times\ [0,\pi] \\
 & & -8\sin x\cos x\sin y\cos y \quad . &
\end{array}$$

Man zeichne die Lösung u für $t = 0, \frac{1}{100}, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}$. Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

Lösung:

Der Produktansatz $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$ eingesetzt in die Differentialgleichung $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ ergibt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} =: -\lambda = (\text{konst}) .$$

Für T erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$T' + \lambda T = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) = Ke^{-\lambda t} .$$

Nach weiterer Trennung ergeben sich gewöhnliche Differentialgleichungen in X und Y

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\mu = (\text{konst}) .$$

Die Randbedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= u(0,y,t) &&= X(0)Y(y)T(t) , \\ 0 &= u(\pi,y,t) &&= X(\pi)Y(y)T(t) , \\ 0 &= u(x,0,t) &&= X(x)Y(0)T(t) , \\ 0 &= u(x,\pi,t) &&= X(x)Y(\pi)T(t) \end{aligned}$$

liefern $X(0) = 0 = X(\pi)$ und $Y(0) = 0 = Y(\pi)$.

Die gewöhnliche Randwertaufgabe in X

$$X''(x) + \mu X(x) = 0 \quad \text{mit} \quad X(0) = 0 = X(\pi)$$

besitzt nur nichttriviale Lösungen für $\mu > 0$

$$X(x) = a\cos(\sqrt{\mu}x) + b\sin(\sqrt{\mu}x) .$$

Einsetzen des Randwertes $X(0) = 0$ ergibt $a = 0$ und $X(\pi) = 0$ liefert $\mu_k = k^2$ mit $k \geq 1$ und $X_k(x) = b_k \sin(kx)$.

Die gewöhnliche Randwertaufgabe in Y

$$Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0 \quad \text{mit} \quad Y(0) = 0 = Y(\pi)$$

besitzt nur nichttriviale Lösungen für $\lambda - \mu > 0$

$$Y(y) = c\cos(\sqrt{\lambda - \mu}y) + d\sin(\sqrt{\lambda - \mu}y) .$$

Einsetzen des Randwertes $Y(0) = 0$ ergibt $c = 0$ und $Y(\pi) = 0$ liefert $\lambda_{k,j} - \mu_k = j^2$ mit $j \geq 1$ und $Y_j(y) = d_j \sin(jy)$.

Setzt man $\lambda_{k,j}$ in die Differentialgleichung für T ein, so erhält man dort die Lösungen

$$T_{k,j}(t) = Ke^{-(k^2+j^2)t} .$$

Aus dem Produktansatz und Superposition ergibt sich damit die Lösung

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} A_{k,j} e^{-(k^2+j^2)t} \sin(kx)\sin(jy)\,.$$

Mit der Anfangsvorgabe ergibt sich

$$5\sin 3x \sin 4y - 8\sin x\cos x\sin y\cos y = u(x,y,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} A_{k,j}\sin(kx)\sin(jy)\,.$$

Wegen $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ gilt

$$-8\sin x\cos x\sin y\cos y = -2\sin 2x\sin 2y$$

und man erhält mit einem Koeffizientenvergleich $A_{3,4} = 5$, $A_{2,2} = -2$ und $A_{k,j} = 0$ sonst, also die Lösung

$$u(x,y,t) = 5e^{-25t}\sin(3x)\sin(4y) - 2e^{-8t}\sin(2x)\sin(2y)\,.$$

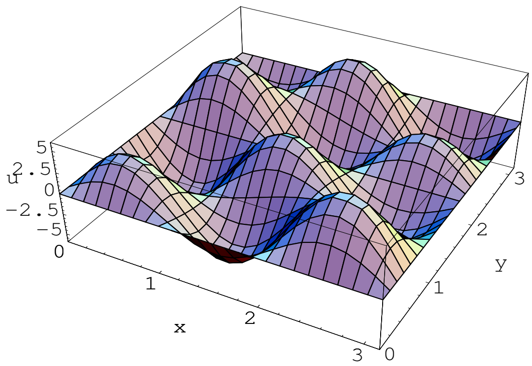

Bild 21 a) $u(x,y,0)$

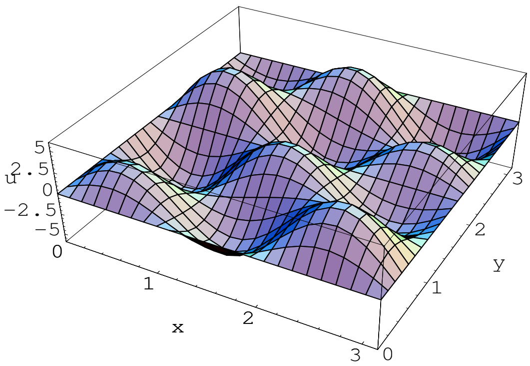

Bild 21 b) $u(x,y,1/100)$

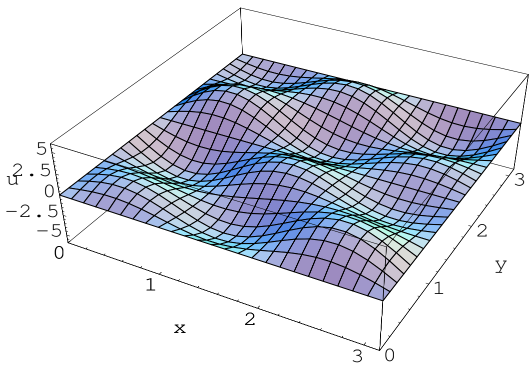

Bild 21 c) $u(x,y,1/25)$

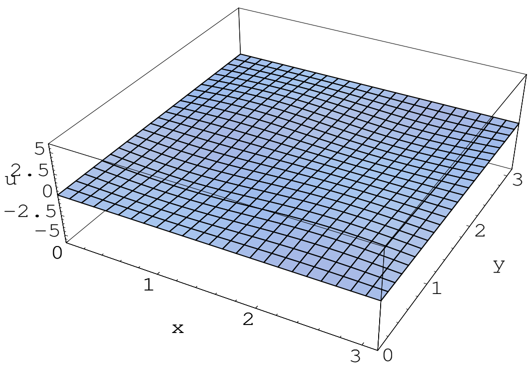

Bild 21 d) $u(x,y,1/5)$

Wegen $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-25t} = 0 = \lim\limits_{t\to\infty} e^{-8t}$ gilt $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,y,t) = 0\,.$

Aufgabe 22:

Die Telegraphengleichung $u_{xx} = 4u_{tt} + 4u_t + u$ beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist die Signalspannung $u(x, t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0, t) = 5\sin(3t)$, für $t \geq 0$, eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung u für $x \to \infty$ beschränkt sein.

a) Man zeige, dass ein Produktansatz der Form $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ zu keiner Lösung führt.

b) Man versuche den Lösungsansatz $u(x, t) = u_0 e^{-ax} \sin(3t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Lösung:

a) Der Produktansatz $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ in Verbindung mit der Randbedingung $u(0, t) = 5\sin(3t)$ ergibt $T(t) = \dfrac{5}{X(0)}\sin(3t)$. Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
0 &= 4u_{tt} + 4u_t + u - u_{xx} \\
&= -4\frac{45X(x)}{X(0)}\sin(3t) + 4\frac{15X(x)}{X(0)}\cos(3t) + \frac{5X(x)}{X(0)}\sin(3t) - \frac{5X''(x)}{X(0)}\sin(3t) \\
&= \underbrace{\left(-\frac{175X(x)}{X(0)} - \frac{5X''(x)}{X(0)}\right)}_{=0}\sin(3t) + \underbrace{\left(\frac{60X(x)}{X(0)}\right)}_{=0}\cos(3t)\,.
\end{aligned}$$

Einzige Lösung ist damit $X \equiv 0$. Dies führt auf $u \equiv 0$, der Produktansatz liefert hier also keine Lösung.

b) Der Lösungsansatz $u(x,t) = 5e^{-ax}\sin(3t - bx)$ erfüllt die Randbedingungen und $a > 0$ sorgt für die Beschränktheit von u für $x \to \infty$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= 4u_{tt} + 4u_t + u - u_{xx} \\ &= 5e^{-ax}\left\{\sin(3t - bx)\underbrace{\left((b^2 - a^2) - 35\right)}_{=0} + \cos(3t - bx)\underbrace{(12 - 2ab)}_{=0}\right\} . \end{aligned}$$

Das resultierende nichtlineare Gleichungssystem

$$ab = 6 \quad \wedge \quad b^2 - a^2 = 35.$$

$\Rightarrow\ a = \dfrac{6}{b}\ \Rightarrow\ 35 = b^2 - a^2 = b^2 - \dfrac{36}{b^2}$

$\Rightarrow\ 0 = b^4 - 35b^2 - 36 = (b^2 + 1)(b^2 - 36)$

besitzt die Lösungen $a = 1,\ b = 6$ und $a = -1,\ b = -6$.

Letztere führen auf unbeschränktes u für $x \to \infty$ und werden daher ausgeschlossen.

Damit lautet die Lösung der Telegraphengleichung

$$u(x,t) = 5e^{-x}\sin(3t - 6x) .$$

Die homogene Wellengleichung

Die **Anfangswertaufgabe** (Ganzraumproblem) für die homogene Wellengleichung in einer Raumdimension ($n = 1$)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} , \qquad x \in \mathbb{R} , \quad t > 0 , \\ u(x,0) &= u_0(x) , \qquad x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= v_0(x) \end{aligned}$$

wird gelöst durch die **d'Alembertsche Lösungsformel**

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi)d\xi .$$

Die Lösung u hängt im Punkt (x_0, t_0) von den Anfangsdaten u_0, v_0 im Intervall $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ ab.

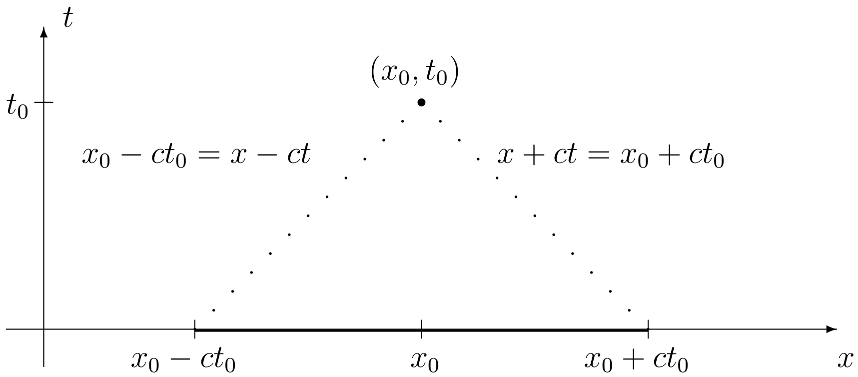

Bild Abhängigkeitsbereich $A = [x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$

Sind die Anfangsdaten u_0, v_0 im Intervall $[a, b]$ gegeben, so ist die Lösung u in den Punkten (x, t) bestimmt, für die gilt: $x - ct, x + ct \in [a, b]$.

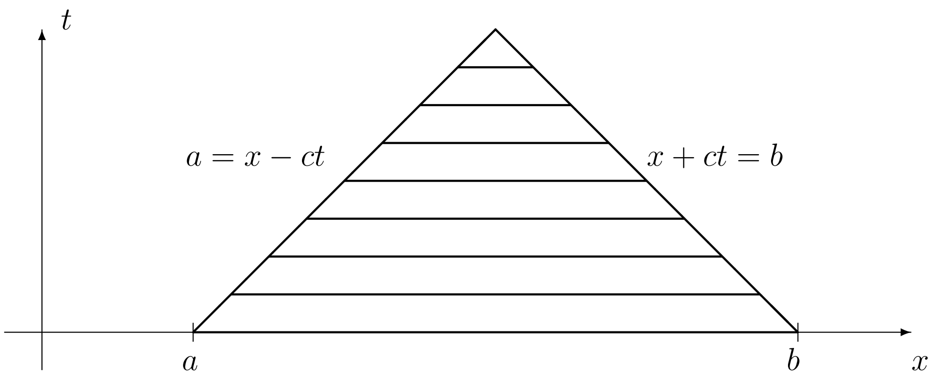

Bild Bestimmtheitsbereich für $t \geq 0$

Bemerkung:

Um eine C^2-Funktion u zu erhalten muss von den Anfangsfunktionen $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ und $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$ verlangt werden.

Aufgabe 23:

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 16u_{xx}\,, & x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, & x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= \cos x\,. \end{aligned}$$

a) Man gebe den Abhängigkeitsbereich der Lösung im Punkt $(x_0, t_0) = (2, 1)$ an.

b) Man zeichne den Bestimmtheitsbereich der Lösung zum Intervall $[-10, 14]$ für $t \geq 0$

c) Man löse das Anfangswertproblem und zeichne die Lösung.

Lösung:

Ein Vergleich von $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ mit $u_{tt} = 16u_{xx}$ ergibt $c = 4$.

a) Abhängigkeitsbereich $\quad (x_0, t_0) = (2, 1):\ A = [x_0 - ct_0, x_0 + ct_0] = [-2, 6]$

b)

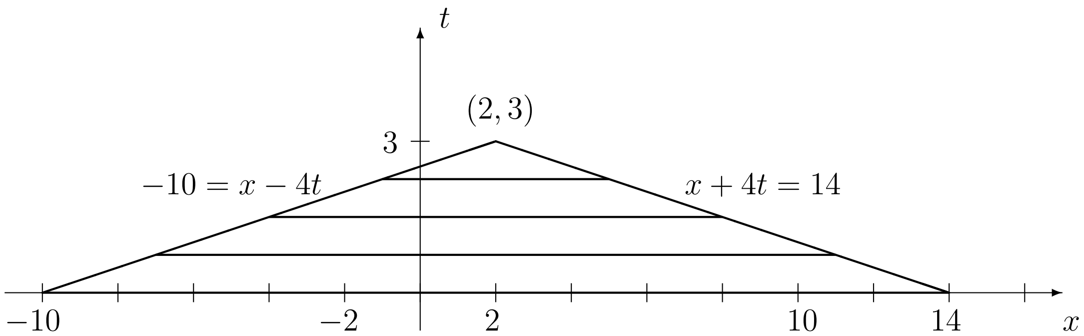

Bild 23 b) Bestimmtheitsbereich für $t \geq 0$

c) Mit der d' Alembertschen Lösungsformel erhält man

$$u(x,t) = \frac{1}{2 \cdot 4} \int\limits_{x-4t}^{x+4t} \cos y \, dy = \frac{1}{8} \left(\sin(x + 4t) - \sin(x - 4t) \right) \,.$$

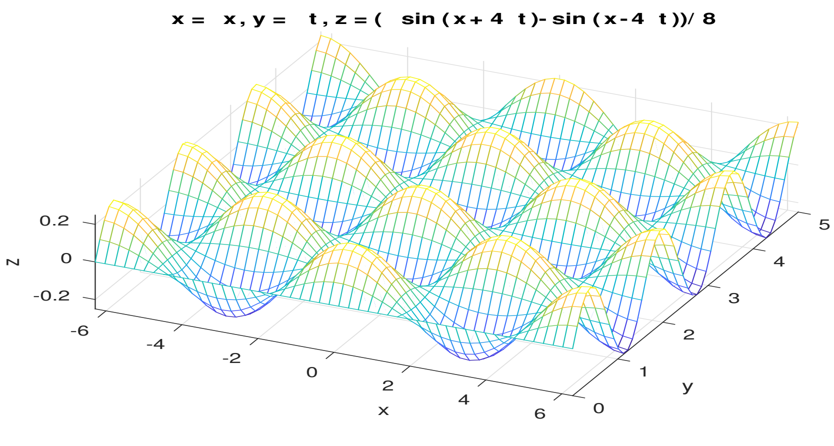

Bild 23 c) Lösung $u(x, y)$

Die **Anfangsrandwertaufgabe** (Halbraumproblem) für die homogene Wellengleichung mit $c > 0$ in einer Raumdimension ($n = 1$) lautet

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} & = & c^2 u_{xx}\,, & x > 0\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) & = & u_0(x)\,, & x \geq 0\,, \\ u_t(x,0) & = & v_0(x)\,, & \\ u(0,t) & = & 0\,, & t \geq 0\,. \end{array}$$

Die Funktionen u_0, v_0 liefern die Lösung u nach der d' Alembertschen Lösungsformel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi)d\xi$$

also zunächst nur im Bestimmtheitsbereich $x - ct \geq 0 \Leftrightarrow x \geq ct$.

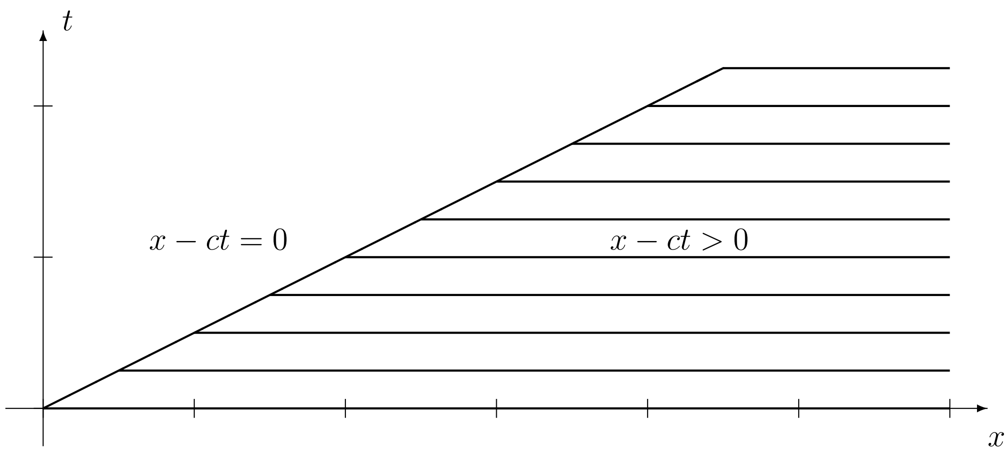

Bild Bestimmtheitsbereich für $x - ct \geq 0$

Die Auswertung der Randbedingung $0 = u(0,t)$ führt auf

a) für $u_0 \not\equiv 0$ und $v_0 \equiv 0$

$$0 = u(0,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(ct) + u_0(-ct)\right) \;\Rightarrow\; u_0(ct) = -u_0(-ct) \;\Rightarrow\; u_0 \text{ ungerade},$$

b) für $u_0 \equiv 0$ und $v_0 \not\equiv 0$

$$0 = u(0,t) = \frac{1}{2c}\int\limits_{-ct}^{ct} v_0(\xi)d\xi = \frac{V_0(ct) - V_0(-ct)}{2c}$$

$\Rightarrow$ Stammfunktion V_0 gerade $\Rightarrow$ v_0 ungerade .

Die ungerade Fortsetzung der Anfangsfunktionen u_0 und v_0 wird als **Reflexionsmethode** bezeichnet. Die resultierende Lösungsformel im Halbraum $x, t \geq 0$ lautet:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\right) + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)\,dy \quad , \quad 0 \leq ct \leq x \\ \dfrac{1}{2}\left(u_0(x+ct) - u_0(ct-x)\right) + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{ct-x}^{x+ct} v_0(y)\,dy \quad , \quad 0 \leq x < ct\,. \end{cases}$$

Aufgabe 24:

Gegeben sei das Anfangsrandwertproblem im Halbraum

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0\,, & x \in \mathbb{R}_+,\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, & x \geq 0\,, \\ u_t(x,0) &= v_0(x)\,, & \\ u(0,t) &= 0\,, & t > 0. \end{aligned}$$

a) Man gebe den Abhängigkeitsbereich der Lösung im Punkt $(x_0, t_0) = (3, 1)$ an.

b) Man zeichne den Bestimmtsheitsbereich der Lösung zum Intervall $[0, 6]$ für $t \geq 0$.

c) Man löse das Anfangsrandwertproblem mit Hilfe der Reflexionsmethode und kläre, ob es sich bei der gefundenen Lösung um eine C^2-Funktion handelt, für

   (i) $u_0(x) = x(x-1)(x+1), \quad v_0(x) = 8x$,

   (ii) $u_0(x) = 1 - \cos x, \quad v_0(x) = 0$.

Lösung:

Ein Vergleich von $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ mit $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$ ergibt $c = 2$.

a) Abhängigkeitsbereich für $(x_0, t_0) = (3, 1)$: $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0] = [1, 5]$

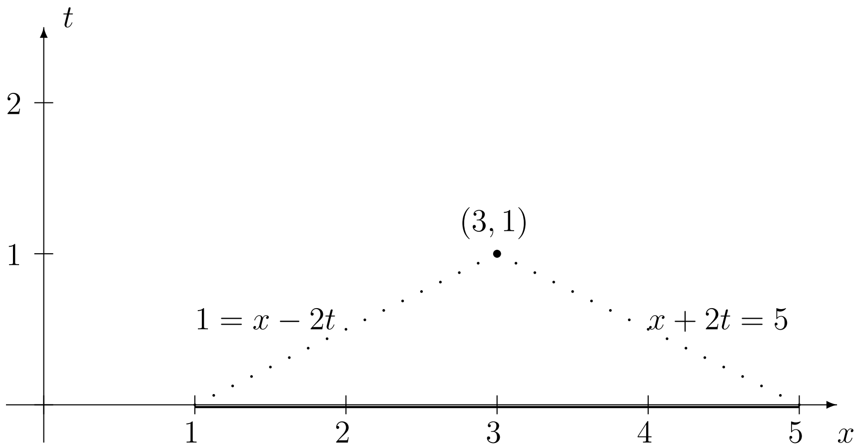

Bild 24 a) Abhängigkeitsbereich $[1, 5]$ für $(x_0, t_0) = (3, 1)$

b) Im Bestimmtheitsbereich gilt: $x - 2t, x + 2t \in [0, 6]$

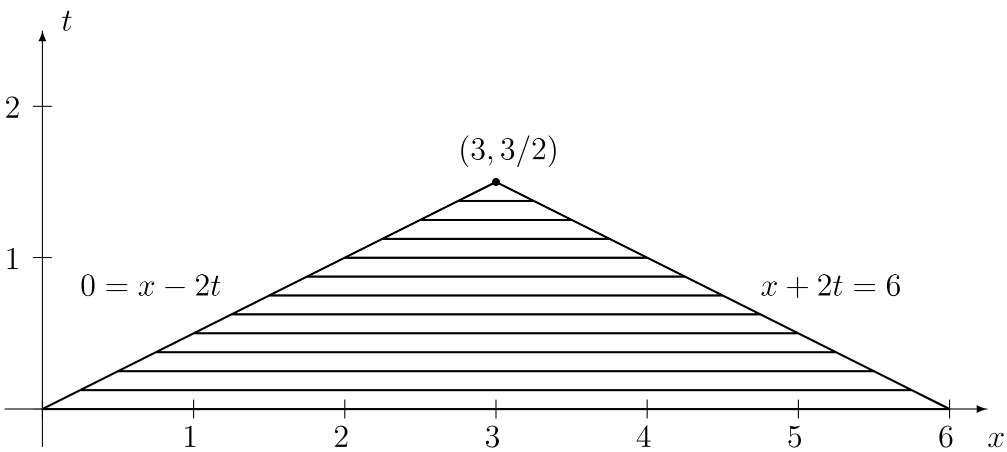

Bild 24 b) Bestimmtheitsbereich für $t \geq 0$

c) Die Reflexionsmethode setzt die Anfangsfunktionen ungerade fort, so dass man ein reines Anfangswertproblem mit ungeraden Anfangsfunktionen erhält, auf dass dann die d'Alembertsche Lösungsformel angewendet wird.

Die resultierende Lösungsformel lautet:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(u_0(x+2t)+u_0(x-2t)\right)+\frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t} v_0(y)\,dy & , \quad 2t \le x \\ \frac{1}{2}\left(u_0(x+2t)-u_0(2t-x)\right)+\frac{1}{4}\int\limits_{2t-x}^{x+2t} v_0(y)\,dy & , \quad x < 2t \end{cases}$$

(i) Bei der zu berechnenden Lösung handelt es sich um eine C^2-Funktion, denn $u_0(x) = x^3 - x$ und $v_0(x) = 8x$ sind ungerade, also identisch mit ihren ungeraden Fortsetzungen.

Die Lösung des Anfangsrandwertproblem ist also die Einschränkung des (ungerade fortgesetzten) Anfangsproblems auf den '1. Quadranten'.

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left((x+2t)^3-(x+2t)+(x-2t)^3-(x-2t)\right) \\ +\frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t} 8y\,dy, \quad 2t \le x \\ \frac{1}{2}\left((x+2t)^3-(x+2t)-((2t-x)^3-(2t-x)\right) \\ +\frac{1}{4}\int\limits_{2t-x}^{x+2t} 8y\,dy, \quad x < 2t \end{cases}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left((x+2t)^3+(x-2t)^3-2x\right)+y^2\big|_{x-2t}^{x+2t} & , \quad 2t \le x \\ \frac{1}{2}\left((x+2t)^3+(x-2t)^3-2x\right)+y^2\big|_{2t-x}^{x+2t} & , \quad x < 2t \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\left((x+2t)^3+(x-2t)^3-2x\right)+(x+2t)^2-(x-2t)^2$$

(ii)

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\cos(x+2t)+1-\cos(x-2t)) & , \quad 2t \le x \\ \frac{1}{2}(1-\cos(x+2t)-(1-\cos(2t-x))) & , \quad x < 2t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-\frac{1}{2}(\cos(x+2t)+\cos(x-2t)) & , \quad 2t \le x \\ -\frac{1}{2}(\cos(x+2t)-\cos(x-2t)) & , \quad x < 2t \end{cases}$$

Die Lösung u ist in den Dreiecken $0 < 2t < x$ und $0 < x < 2t$ jeweils C^2-Funktion und auf der Diagonalen $x = 2t$ stetig.
Die ersten partiellen Ableitungen sind für $x = 2t$ stetig:

$$u_x(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sin(x+2t)+\sin(x-2t)) & , \quad 2t < x \\ \frac{1}{2}(\sin(x+2t)-\sin(x-2t)) & , \quad x < 2t, \end{cases}$$

$$u_t(x,t) = \begin{cases} \sin(x+2t)-\sin(x-2t) & , \quad 2t < x \\ \sin(x+2t)+\sin(x-2t) & , \quad x < 2t. \end{cases}$$

u_{xx} ist auf $x = 2t$ unstetig:

$$u_{xx}(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\cos(x+2t)+\cos(x-2t)) & , \quad 2t < x \\ \frac{1}{2}(\cos(x+2t)-\cos(x-2t)) & , \quad x < 2t. \end{cases}$$

Der Grund liegt darin, dass $u_0(x) = 1-\cos x\,,\ x \ge 0$ ungerade fortgesetzt nur C^1 und nicht C^2-Funktion (in $x = 0$) ist.