Satz 6.12 Die affine Ebene $(A, \mathfrak{G})$ ist desarguessch genau dann, wenn $\forall a, b, z \in A$, verschieden und kollinear, eine Dilatation δ mit Fixpunkt z und $\delta(a) = b$ existiert.

Beweis: "$\Leftarrow$": Analog zum Beweis von (6.10).

"$\Rightarrow$": sei a, b, z wie oben. Für $x \in A \setminus \overline{a, b}$ setzen wir $\delta(x) = \overline{z, x} \cap \{b \| \overline{x, a}\}$. Für $x \in \overline{a, b} \setminus \{z\}$ wähle Hilfspunkt $c \in A \setminus \overline{a, b}$, und verfahre wie gehabt. Schließlich sei $\delta(z) = z$. Weiter wie im Beweis von (6.10). Übung. □

Bemerkung (1) Sei $o \in A$ ein fester Punkt. Dann ist $\Delta_o := \{\delta \in \Delta \mid \delta(o) = o\}$ eine Untergruppe von Δ. Im Fall $A = \mathrm{AG}(2, K)$ gilt $\Delta_o \cong (K^*, \cdot)$ (Beweis später!). Diesen Umstand kann man nutzen, um K^* in einer desarguesschen Ebene zu konstruieren. Dabei bekommt man die Gruppeneigenschaft geschenkt.

(2) In ähnlicher Weise kann man $(K, +)$ als Untergruppe von T gewinnen. Es bleibt das Zusammenwirken von $(K, +)$ und Δ_o zu klären, um auch die Distributivgesetze nachweisen zu können. Die Einführung von Koordinaten entspricht dem Nachweis, daß T ein Vektorraum über K ist.

(3) Analog kann man auch nicht desarguessche Ebenen koordinatisieren, etwa Fastkörperebenen. Bei Translationsebenen ist immerhin T noch ein Vektorraum über einem geeigneten Körper.

(4) Die Gültigkeit von Schließungssätzen vom Desargues-Typ ziehen die Existenz gewisser Zentralkollineationen auf der projektiven Ebene nach sich und umgekehrt. Dies mündet in der Klassifikation projektiver Ebenen nach Lenz und Barlotti.

Literatur

[HP73] Hughes and Piper. *Projective planes.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

Geometrie I

Skript zur Vorlesung

Teil 1

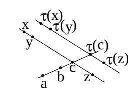
Inhaltsverzeichnis

2. Fall: $d \in \overline{c,\tau(c)}$. Wähle Hilfspunkt $e \notin \overline{c,\tau(c)} \cup \overline{a,b}$ und benutze den 1. Fall zweimal (die Existenz des Hilfspunktes ist nur dann gesichert, wenn $\operatorname{ord} A \geq 3$. Im Fall $\operatorname{ord} A = 2$ gilt $A \cong \mathrm{AG}(2,\mathbb{Z}_2)$; dies ist eine Translationsebene).

τ ist somit wohldefiniert.

Lemma Für alle kollinearen $x,y,z \in A$ sind $\tau(x),\tau(y),\tau(z) \in A$ kollinear und es gilt $\overline{x,y} \| \overline{\tau(x),\tau(y)}$.

1. Fall: $\overline{x,y} \| \overline{a,b} \Rightarrow$ nach Konstruktion $\overline{\tau(x),\tau(y)} = \overline{x,y}$ und $\tau(z) \in \overline{x,y} = \overline{\tau(x),\tau(y)}$. Insbesondere gilt $\overline{x,y} \| \overline{\tau(x),\tau(y)}$.



2. Fall: $\exists c = \overline{x,y} \cap \overline{a,b}$. Wegen des oberen Lemmas gilt sowohl $\tau(c) = \{\tau(x) \| \overline{x,c}\} \cap \overline{a,b}$ als auch $\tau(c) = \{\tau(y) \| \overline{y,c}\} \cap \overline{a,b}$, also $\tau(c) \in \overline{\tau(x),\tau(y)}$. Entsprechend $\tau(c) \in \overline{\tau(x),\tau(z)} \Rightarrow \tau(z) \in \overline{\tau(c),\tau(x)} = \overline{\tau(c),\tau(y)}$. Das zeigt auch $\overline{x,y} \| \overline{\tau(x),\tau(y)}$, denn $\overline{x,y} = \overline{x,c} \| \overline{\tau(x),\tau(c)} = \overline{\tau(x),\tau(y)}$.

Sei nun τ' wie τ definiert, aber mit $\tau'(b) = a$. Nach Konstruktion gilt $\tau' \circ \tau = \mathrm{id}$ (zunächst für $x \notin \overline{a,b}$ usw.). Wegen Symmetrie gilt auch $\tau \circ \tau' = \mathrm{id}$, also ist τ' die Inverse von τ und τ ist bijektiv. Für τ' gilt ebenfalls das zweite Lemma, daher ist τ eine Kollineation und wegen $\overline{x,y} \| \overline{\tau(x),\tau(y)} = \tau(\overline{x,y})\ \forall x,y \in A, x \neq y$, ist τ sogar eine Dilatation. Wegen $\overline{x,\tau(x)} \| \overline{y,\tau(y)}\ \forall x,y \in A$ kann es keine Fixpunkte geben, also $\tau \in T$. □

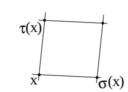
Beispiel Jede Fastkörper-Ebene ist eine Translationsebene. Die Moulton-Ebene ist keine Translationsebene (vgl. Aufgabe 17).

Bemerkung (1) Der Beweis zeigt, daß die Existenz von Translationen mit Richtung $G \in \mathfrak{G}$ äquivalent zu (Ad) mit “Richtung G” ist (d.h. $G_1, G_2, G_3 \| G$).

(2) Wegen Aufgabe 17c (oder (6.7.1) mit (6.4.2)) gibt es in Translationsebenen zu $a,b \in A$ genau ein $\tau \in T$ mit $\tau(a) = b$. Wählt man $o \in A$ fest, so werde für alle $a \in A$ mit $\tau_a \in T$ genau die Translation mit $\tau_a(o) = a$ bezeichnet. Dann ist $\tau : A \to T;\ a \mapsto \tau_a$ eine Bijektion. Man kann mit $a + b := \tau_a(b)\ \forall a,b \in A$ eine Addition auf A einführen und $(A,+)$ ist dann eine Gruppe isomorph zu T. Ein geeigneter Isomorphismus ist τ, d.h. $\tau_{a+b} = \tau_a \circ \tau_b$ (Nachweis durch Anwenden auf o). Tatsächlich ist $(A,+)$ eine kommutative Gruppe, denn

Satz 6.11 In jeder Translationsebene $(A,\mathfrak{G})$ ist T kommutativ.

Beweis: Seien $\sigma,\tau \in T$ und $x \in A$.



1. Fall: $x,\sigma(x),\tau(x)$ nicht kollinear. Es gilt $\overline{x,\sigma(x)} \| \overline{\tau(x),\tau\circ\sigma(x)}$ und $\overline{x,\tau(x)} \| \overline{\sigma(x),\sigma\circ\tau(x)}$.

$$\tau\circ\sigma(x) = \overline{\tau(x),\tau\circ\sigma(x)} \cap \overline{\sigma(x),\sigma\circ\tau(x)} = \sigma\circ\tau(x) \Rightarrow \tau\circ\sigma = \sigma\circ\tau,$$

denn $\tau\circ\sigma$ und $\sigma\circ\tau$ sind Translationen.

2. Fall: $x,\sigma(x),\tau(x)$ sind kollinear. Wähle $\rho \in T$ mit $\rho(x) \notin \overline{x,\sigma(x)}$. Also $\sigma\circ(\tau\circ\rho) = (\tau\circ\rho)\circ\sigma = \tau\circ(\rho\circ\sigma) = \tau\circ(\sigma\circ\rho)$. Jetzt ρ kürzen $\Rightarrow \sigma\circ\tau = \tau\circ\sigma$. Dabei gilt $\tau\circ\rho(x) \notin \overline{x,\tau(x)}$, denn $\tau\circ\rho(x) \in \{\rho(x) \| \overline{x,\tau(x)}\} \neq \overline{x,\tau(x)}$. □

(1) Ist $z \in A$ Zentrum, so hat α keinen weiteren Fixpunkt und jede Fixgerade geht durch z.

(2) Ist $L \in \mathfrak{G}$ Achse von α, so liegen alle Fixpunkte auf L. Die Menge der Fixgeraden ($\neq L$) bilden eine Parallelklasse, nämlich $[\overline{x, \alpha(x)}]$ für $x \in A \setminus L$.

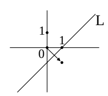
(3) α hat höchstens eine Achse und höchstens ein Zentrum, aber nicht beides zugleich.

Beweis: Übung. $\square$

Bemerkung (1) (6.8.1), "keinen weiteren Fixpunkt" wurde in Aufgabe 6b schon gezeigt.

(2) Wegen (6.7.1) ist jede Dilatation und jede Achsenaffinität durch ein Punkt-Bildpunkt-Paar (a, b) eindeutig bestimmt, falls $a, b \neq z$ bzw. $a, b \notin L$, d.h. (6.7) gilt sinngemäß für Dilatationen und Achsenaffinitäten.

Beispiel In $\mathrm{AG}(2, \mathbb{R})$ sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathrm{AG}(2, \mathbb{R}))$ mit Achse $L = \binom{1}{0} + \binom{1}{1}\mathbb{R}$ und $\alpha(\binom{0}{0}) = \binom{1}{-1}$. Wir versuchen den Ansatz $\alpha(x) = \mathbf{M}x + v$ mit unbestimmten Koeffizienten in $\mathbf{M}, v$. Das Einsetzen von Punkten aus L und $\binom{0}{0}$ führt auf $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v = \binom{1}{-1}$.



Definition Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene. Es bezeichne $\mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G})$ die Gruppe aller Automorphismen, $\Delta = \Delta(A, \mathfrak{G})$ die Menge aller Dilatationen und $T = T(A, \mathfrak{G})$ die Menge aller Translationen. Bezeichnet $\leq$ die Relation "ist Untergruppe von", so gilt

Satz 6.9 $T \leq \Delta \leq \mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G})$

Beweis: Übung.

Satz 6.10 In der affinen Ebene $(A, \mathfrak{G})$ gilt (Ad) genau dann, wenn T auf A *transitiv operiert*, d.h. $\forall x, y \in A\, \exists \tau \in T$ mit $\tau(x) = y$. $(A, \mathfrak{G})$ heißt dann *Translationsebene*.

Beweis: "$\Leftarrow$": Eine Konfiguration von (Ad) sei gegeben. Laut Voraussetzung existiert eine Translation $\tau \in T$ mit $\tau(a_1) = b_1$ (also ist $[G_1]$ das Zentrum von τ^*) und es gilt:

$$\tau(a_2) = G_2 \cap \{b_1 \| \overline{a_1, a_2}\} = b_2 \quad \Rightarrow \quad \tau(a_3) = G_3 \cap \{b_2 \| \overline{a_2, a_3}\} = b_3$$

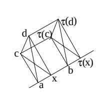
also $\overline{b_1, b_3} = \tau(\overline{a_1, a_3}) \| \overline{a_1, a_3}$, da τ Dilatation.

"$\Rightarrow$": Seien $a, b \in A, a \neq b$. Konstruiert wird ein Isomorphismus τ mit $\tau(a) = b$. Anschließend wird $\tau \in T$ gezeigt. Definiere τ wie folgt: für $x \in A \setminus \overline{a, b}$ sei $\tau(x) = \{b \| \overline{a, x}\} \cap \{x \| \overline{a, b}\}$. Zu $x \in \overline{a, b}$ wähle $c \in A \setminus \overline{a, b}$ und setze $\tau(x) = \{\tau(c) \| \overline{c, x}\} \cap \overline{a, b}$.

Lemma τ ist unabhängig von der Wahl von c.

Beweis: Sei $d \in A \setminus \overline{a, b}$ und τ' definiert wie τ, jedoch mit d statt mit c. Wir zeigen $\tau(x) = \tau'(x)$ für alle $x \in \overline{a, b}$; daraus folgt sofort $\tau = \tau'$:

1. Fall: $d \notin \overline{c, \tau(c)} = \{c \| \overline{a, b}\}$, dann erfüllt $c, a, d, \tau(c), b, \tau(d)$ die Voraussetzungen von (Ad), also $\overline{c, d} \| \overline{\tau(c), \tau(d)}$. Zu $x \in \overline{a, b}$ erfüllen $x, c, d, \tau(x), \tau(c), \tau(d)$ ebenfalls die Voraussetzungen von (Ad), also gilt $\overline{x, d} \| \overline{\tau(x), \tau(d)}$, d.h. $\tau(x) = \tau'(x)$.



1 Inzidenzräume

Definition Seien $P, \mathfrak{G}$ Mengen und $I \subseteq P \times \mathfrak{G}$ eine Relation, genannt *Inzidenzrelation*. $(P, \mathfrak{G}, I)$ heißt *Inzidenzraum* (oder *linearer Raum*), wenn gilt:

(I1) $\forall x, y \in P,\ x \neq y,\ \exists_1 G \in \mathfrak{G}$ mit x, yIG.

(I2) $\forall G \in \mathfrak{G}\ \exists x, y \in P,\ x \neq y,$ mit x, yIG.

Bemerkung (1) Elemente aus P heißen *Punkte*, Elemente aus $\mathfrak{G}$ heißen *Geraden*.

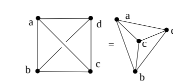
(2) Im Falle xIG sagen wir „x liegt auf G“, „G geht durch x“, „x inzidiert mit G“ und ähnliche geometrische Sprechweisen.

(3) Die durch (I1) eindeutig festgelegte Gerade $G \in \mathfrak{G}$ mit x, yIG für $x, y \in P, x \neq y$, bezeichnen wir mit $\overline{x, y} := G$.

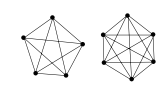
(4) Häufig wird ein Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G}, I)$ auch einfach mit P bezeichnet.

(5) Bei der Darstellung endlicher Inzidenzräume werden die Punkte in die euklidische Ebene gezeichnet und mit Kurven verbunden, um die Geraden anzudeuten. Die Geraden gehen dann ausschließlich durch die vorher markierten Punkte, die durch die Kurve verbunden sind (vgl. die folgenden Beispiele). Insbesondere, müssen Geraden nicht „anschaulich gerade“ sein, d.h. sie müssen nicht in der euklidschen Ebene als Geraden darstellbar sein.

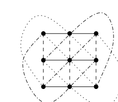
Beispiel 1.1 (1) $P = \{a, b, c, d\}$, $\mathfrak{G} = \{A \subseteq P \mid |A| = 2\}$ (also $|\mathfrak{G}| = 6$), $I = \in$.



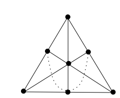
(2) allgemeiner: sei P eine beliebige Menge, $\mathfrak{G} = \{A \subseteq P \mid |A| = 2\}$ (also $|\mathfrak{G}| = \binom{|P|}{2}$ falls $|P| = n \in \mathbb{N}$), $I = \in$. Dann heißt $(P, \mathfrak{G}, I)$ auch *vollständiger Graph*.



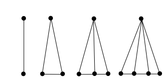
(3) durch die linke Figur definiert.



(4) durch rechte Figur definiert.



(5) Zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedenen $x_0, \dots, x_n$ seien P und $\mathfrak{G}$ wie folgt definiert: $P = \{x_0 \dots x_n\}$, $\mathfrak{G} = \{\{x_1 \dots x_n\}\} \cup \{\{x_0, x_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$. Dann ist $(P, \mathfrak{G}, \in)$ ein Inzidenzraum, genannt *near-pencil*.



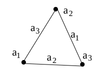
(6) Zu $P = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{G} = \{a + b\mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R}^2, b \in (\mathbb{R}^2)^* := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$ ist $(P, \mathfrak{G}, \in)$ ein Inzidenzraum. $(P, \mathfrak{G}, \in)$ wird auch bezeichnet mit $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ oder $\mathrm{AG}(2, \mathbb{R})$, und heißt *affine Ebene* über $\mathbb{R}$. ($\mathrm{AG}(2, \mathbb{R})$ = „affine Geometrie der Dimension 2 über $\mathbb{R}$“.)

Beweis: Wir zeigen die Aussage für beliebige Körper K. (I1): Seien $x, y \in P = K^2, x \neq y$. Dann gilt $x, y \in x + (y - x)K \in \mathfrak{G}$. Eindeutigkeit: seien $x, y \in a + bK$, dann existieren $\lambda, \mu \in K$ mit $x = a + b\lambda$, $y = a + b\mu$, $\lambda \neq \mu$. Dann gilt $y - x = b(\mu - \lambda) \Rightarrow (y - x)K = bK$

und $x + bK = a + b\lambda + bK = a + bK \Rightarrow$ es existiert genau eine Verbindungsgerade. (I2) ist klar. Somit ist P ein Inzidenzraum. $\square$

(7) Zu $P = \{a\mathbb{R} \mid a \in (\mathbb{R}^3)^*\}$, $\mathfrak{G} = \{a\mathbb{R} + b\mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig$\}$ ist $(P, \mathfrak{G}, \subseteq)$ ein Inzidenzraum. Übung.

(8) $P = \{a_1, a_2, a_3\} = \mathfrak{G}$, $a_i I a_j \Leftrightarrow i \neq j$.



Bemerkung Man kann immer erreichen, daß $P \cap \mathfrak{G} = \emptyset$: Ist $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum, so kann man jede Gerade $G \in \mathfrak{G}$ mit der Menge der Punkte identifizieren, die mit G inzident sind, d.h. $G' := \{x \in P \mid xIG\}$ und $\mathfrak{G}' = \{G' \mid G \in \mathfrak{G}\}$. Dann ist $(P, \mathfrak{G}', \in)$ ein Inzidenzraum *isomorph* zum ursprünglichen. Im Folgenden darf also, wenn $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum ist, o. B. d. A. $\mathfrak{G} \subseteq \mathcal{P}(P)$ und $I = \in$ vorrausgesetzt werden. Auf die explizite Nennung der Inzidenzrelation $\in$ kann dann verzichtet werden und wir schreiben $(P, \mathfrak{G})$ statt $(P, \mathfrak{G}, \in)$.

Definition Sei ein Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G}, I)$ gegeben. Eine Punktmenge $A \subseteq P$ heißt *kollinear*, wenn es eine Gerade $G \in \mathfrak{G}$ gibt mit $\forall a \in A: \ aIG$. Eine Geradenmenge $B \subseteq \mathfrak{G}$ heißt *kopunktal*, wenn es einen Punkt $x \in P$ gibt mit $\forall G \in B: \ xIG$.

Definition Seien $(P, \mathfrak{G}, I)$ und $(P', \mathfrak{G}', I')$ Inzidenzräume. Eine Bijektion $\sigma : P \to P'$ heißt *Kollineation* oder *Isomorphismus* wenn $\forall x, y, z \in P$ gilt:

$$\{x, y, z\} \text{ ist kollinear (bzgl. } P) \Leftrightarrow \{\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)\} \text{ ist kollinear (bzgl. } P')$$

Im Falle $(P, \mathfrak{G}, I) = (P', \mathfrak{G}', I')$ heißt σ *Automorphismus*.

Vorsicht! Es genügt nicht, daß $P = P'$ ist.

Existiert zwischen zwei Inzidenzräumen $(P, \mathfrak{G}, I)$ und $(P', \mathfrak{G}', I')$ eine Kollineation, so heißen die Inzidenzräume *isomorph*. Man schreibt auch $(P, \mathfrak{G}, I) \cong (P', \mathfrak{G}', I')$, oder kürzer $P \cong P'$.

Definition In einem gegebenen Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G}, I)$ schreiben wir für $G, H \in \mathfrak{G}$ kürzer $G \cap H := \{x \in P \mid xIG \wedge xIH\}$. Ist $G \cap H$ einelementig, so schreiben wir statt $\{x\} = G \cap H$ auch $x := G \cap H$. Wir schreiben für eine Punktmenge $A \subseteq P$ auch $A \subseteq G$, falls $\forall a \in A: \ aIG$.

Lemma 1.2 Sei $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum und $G, H \in \mathfrak{G}$, dann gilt $G = H$ oder $|G \cap H| = 1$ oder $G \cap H = \emptyset$.

Beweis: Seien $x, y \in G \cap H$ mit $x \neq y$, dann gilt $G = \overline{x, y} = H$ wegen (I1). $\square$

Satz 1.3 Seien $(P, \mathfrak{G}, \in)$ und $(P', \mathfrak{G}', \in)$ Inzidenzräume und $\sigma : P \to P'$ eine Bijektion. Dann sind äquivalent:

(1) σ ist eine Kollineation

(2) Der hier formulierte Beweis ist verbessert im Vergleich zu dem in der Vorlesung gegebenen.

Definition Eine Kollineation σ der projektiven Ebene P heißt *Zentralkollineation*, wenn sie ein Zentrum z und damit auch eine Achse L besitzt. σ heißt *Homologie*, wenn $z \notin L$, und *Elation*, wenn $z \in L$.

Satz 6.7 Sei σ Zentralkollineation der projektiven Ebene $(P, \mathfrak{G})$ mit Zentrum z und Achse L. Dann gilt:

(1) Durch ein Paar $(p, \sigma(p))$ mit $p \in P \setminus (L \cup \{z\})$ ist σ eindeutig bestimmt. Genauer: für $x \in P \setminus (L \cup \{z\})$ gilt $\sigma(x) = \overline{x, z} \cap \overline{\overline{p, x} \cap L, \sigma(p)}$ (falls $x \notin \overline{p, z}$). Für $x \in \overline{p, z}$ wähle einen Hilfspunkt $q \notin \overline{p, z}$.

(2) $\sigma = \mathrm{id} \Leftrightarrow \exists$ Fixpunkt $p \in P \setminus (L \cup \{z\})$.

Beweis: (1) $\sigma(x) \in \sigma(\overline{x, z}) = \overline{x, z}$, da $z \in \overline{x, z}$. Sei $r := \overline{p, x} \cap L$. Dann $\sigma(r) = r$ und $\sigma(x) \in \sigma(\overline{x, p}) = \sigma(\overline{r, p}) = \overline{\sigma(r), \sigma(p)} = \overline{r, \sigma(p)}$, falls $x \notin \overline{p, z}$.

(2) Konstruiere $\sigma(x)$ wie in (1) aus z und $p = \sigma(p)$. Dann folgt $\sigma(x) = x \ \forall x \in P \Rightarrow \sigma = \mathrm{id}$. $\square$

Bemerkung Zentrum und Achse einer Zentralkollineation $\neq \mathrm{id}$ sind eindeutig bestimmt. Insbesondere ist id die einzige Kollineation, die zugleich Homologie und Elation ist.

6.3 Affinitäten

Definition Automorphismen affiner Ebenen werden auch *Affinitäten* genannt. Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene mit projektivem Abschluß $(P, \mathfrak{G}')$ und Ferngerade F.

$\alpha \in \mathrm{Aut}\, A$ heißt *Dilatation*, wenn α^* eine Zentralkollineation mit Achse F ist. Die Dilatation heißt *Streckung*, wenn α^* eine Homologie ist (also ein Zentrum in A hat), und *Translation*, wenn α^* eine Elation ist (also $\alpha \neq \mathrm{id} \Rightarrow \alpha(x) \neq x \ \forall x \in A$).

$\alpha \in \mathrm{Aut}\, A$ heißt *Achsenaffinität*, wenn α eine Achse L besitzt. Insbesondere heißt α *Scherung*, wenn α^* Elation mit Zentrum auf F ist (d.h. $\alpha \neq \mathrm{id} \Rightarrow \forall x \in A \setminus L: \ \overline{x, \alpha(x)} \| L$). Eine Achsenaffinität heißt *Affinspiegelung*, wenn α^* eine Homologie mit Zentrum auf F ist und zusätzlich $\alpha^2 = \mathrm{id} \neq \alpha$ gilt.

Bemerkung (1) Die Definition einer Dilatation aus Aufgabe 6 ist äquivalent zur hier gegebenen.

(2) Während die Definitionen von Streckung und Translation komplementär sind, existieren durchaus Achsenaffinitäten $\neq \mathrm{id}$, die weder Scherung noch Affinspiegelung sind.

(3) Falls α^* eine Zentralkollineation ist, dann gilt: F ist deren Achse oder $z \in F$. (Übung!)

Satz 6.8 Sei $\alpha \neq \mathrm{id}$ eine Affinität der affinen Ebene $(A, \mathfrak{G})$. Dann gilt:

(3) Im Fall $\sigma|_F = \mathrm{id}_F$, d.h. $\sigma(x) = x \; \forall x \in F$, ist $\sigma|_{P_F}$ eine Dilatation.

Wir betrachten jetzt den Fall $\mathrm{AG}(2,K)$ mit projektivem Abschluß $\mathrm{PG}(2,K)$ für einen Körper K. Zu $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(2,K)$ existiert nach (6.1.3) ein $M \in \mathrm{GL}(2,K)$ mit $\sigma\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = M \cdot \begin{pmatrix} \widehat{\sigma}(x_1) \\ \widehat{\sigma}(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}\widehat{\sigma}(x_1)+m_{12}\widehat{\sigma}(x_2) \\ m_{21}\widehat{\sigma}(x_1)+m_{22}\widehat{\sigma}(x_2) \end{pmatrix}$.

Sei $\iota : A \to P$; $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)K$ die kanonische Einbettung aus (3.8). Sei ferner $a \in K^2$. Dann gilt:

$$(\tau_a \circ \sigma)^*(\iota(x)) = \iota(\tau_a \circ \sigma(x)) = \begin{pmatrix} m_{11}\widehat{\sigma}(x_1)+m_{12}\widehat{\sigma}(x_2)+a_1 \\ m_{21}\widehat{\sigma}(x_1)+m_{22}\widehat{\sigma}(x_2)+a_2 \\ 1 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} M & \begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix} \\ 0\;0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\sigma}(x_1) \\ \widehat{\sigma}(x_2) \\ 1 \end{pmatrix} K.$$

Daher ist $(\tau_a \circ \sigma)^*$ durch $\begin{pmatrix} M & \begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix} \\ 0\;0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \widetilde{\widehat{\sigma}}$ gegeben.

Satz 6.5 Für einen Körper K sei $\sigma \in \mathrm{GL}(2,K)$, beschrieben durch die Matrix $M \in \mathrm{GL}(2,K)$, und $a \in K^2$. Dann wird $(\tau_a \circ \sigma)^*$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} M & \begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix} \\ 0\;0 & 1 \end{pmatrix}$ induziert. □

6.2 Zentralkollineationen

Definition Sei σ ein Automorphismus der affinen bzw. projektiven Ebene $(P, \mathfrak{G})$. Eine Gerade L heißt *Achse* von σ, wenn $\forall x \in L: \; \sigma(x) = x$, d.h. L ist eine Fixpunktgerade. Dual dazu: $z \in P$ heißt *Zentrum* von σ, wenn für alle $G \in \mathfrak{G}$ mit $z \in G$ gilt: $\sigma(G) = G$. Das impliziert natürlich $\sigma(z) = z$.

Satz 6.6 Sei $(P, \mathfrak{G})$ eine projektive Ebene und $\sigma \in \mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G})$. Dann gilt:

(1) Wenn σ eine Achse L besitzt, dann hat σ ein Zentrum z.

(2) Wenn σ ein Zentrum z besitzt, dann hat σ eine Achse L.

Beweis: (1) 1. Fall: $\exists z \in P \setminus L : \sigma(z) = z$. Dann gilt für alle $G \in \mathfrak{G}$ mit $z \in G$: $\sigma(G \cap L) = G \cap L$ und $G = \overline{z, G \cap L}$, also $\sigma(G) = \overline{\sigma(z), \sigma(G \cap L)} = \overline{z, G \cap L} = G$ und z ist ein Zentrum.

2. Fall: $\forall z \in P \setminus L : \sigma(z) \neq z$. Geraden der Form $\overline{a, \sigma(a)}$ mit $a \in P \setminus L$ werden dann unter σ identisch abgebildet: Sei $z = L \cap \overline{a, \sigma(a)}$. Dann

$$\sigma(\overline{a, \sigma(a)}) = \sigma(\overline{a, z}) = \overline{\sigma(a), \sigma(z)} = \overline{\sigma(a), z} = \overline{a, \sigma(a)}.$$

Sei nun $G = \overline{b, z}$ eine weitere Gerade durch z. Für $y = \overline{a, \sigma(a)} \cap \overline{b, \sigma(b)}$ gilt dann $\sigma(y) = y \Rightarrow y \in L \Rightarrow y = z$. Also $G = \overline{b, z} = \overline{b, \sigma(b)}$ und somit $\sigma(G) = G$. Also ist z ein Zentrum.

(2) ist dual zu (1). □

Bemerkung (1) Das Argument zum 2. Fall kann auch in der affinen Ebene P_L mit $\sigma|_{P_L}$ formuliert werden. $\sigma|_{P_L}$ ist dann eine Translation mit Richtung z (Vergleiche Aufgabe 17).

(2) $\forall G \subseteq P$ gilt: $G \in \mathfrak{G} \Leftrightarrow \sigma(G) := \{\sigma(x) \mid x \in G\} \in \mathfrak{G}'$

(3) $\forall x, y \in P, \; x \neq y$ gilt: $\sigma(\overline{x, y}) = \overline{\sigma(x), \sigma(y)}$

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) Es gilt: $G \in \mathfrak{G} \Leftrightarrow \forall x, y, z \in G : \{x, y, z\}$ kollinear $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in G : \{\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)\}$ kollinear $\Leftrightarrow \sigma(G) \in \mathfrak{G}'$.

$\underline{(2) \Rightarrow (3)}$ $\overline{x, y}$ und $\sigma(\overline{x, y})$ sind Geraden und $\sigma(x)$ und $\sigma(y)$ liegen auf letzterer, also $\sigma(\overline{x, y}) = \overline{\sigma(x), \sigma(y)}$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Seien $x, y, z \in P$ kollinear $\Leftrightarrow z \in \overline{x, y} \Leftrightarrow \sigma(z) \in \sigma(\overline{x, y}) = \overline{\sigma(x), \sigma(y)} \Leftrightarrow \sigma(x), \sigma(y), \sigma(z) \in P'$ sind kollinear. D.h. σ ist eine Kollineation. □

2 Affine Ebenen

Definition Ein Inzidenzraum $(A, \mathfrak{G})$ heißt *affine Ebene*, wenn gilt:

(P) (*Parallelenaxiom*) $\forall G \in \mathfrak{G}, x \in A \setminus G, \; \exists_1 H \in \mathfrak{G}$ mit $x \in H$ und $G \cap H = \emptyset$.

(E3) Es gibt drei nicht kollineare Punkte.

Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene. Geraden G, H heißen *parallel*, geschrieben $G \| H$, wenn $G = H$ oder $G \cap H = \emptyset$. Für $x \in A$ und $G \in \mathfrak{G}$ bezeichne $\{x \| G\}$ die (wegen (P) eindeutig bestimmte) Parallele zu G durch x.

Satz 2.1 In jeder affinen Ebene ist $\|$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{G}$.

Beweis: Reflexivität und Symmetrie sind durch die Definition bereits gegeben, zu prüfen ist noch die Transitivität. Für $G, H, K \in \mathfrak{G}$ gelte $G \| H$ und $H \| K$. Im Fall $G \cap K = \emptyset$ ist nichts zu zeigen. Sei also $G \cap H \neq \emptyset$, etwa $x \in G \cap H \Rightarrow G = \{x \| H\} = K$. □

Definition Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene. Für $G \in \mathfrak{G}$ bezeichne $[G] := \{K \in \mathfrak{G} \mid K \| G\}$ die Äquivalenzklasse von G in $\mathfrak{G}$ bzgl. $\|$. Mit $\mathfrak{G}/_{\|} := \{[G] \mid G \in \mathfrak{G}\}$ werde wie üblich die Menge aller Äquivalenzklassen bezeichnet.

Beispiel 2.2 (1) Der Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G})$ aus (1.1.1) ist die kleinstmögliche affine Ebene (genannt *Minimalmodell*), d.h. es gibt keine affine Ebene $(A, \mathfrak{G}')$ mit $|A| < |P|$.

(2) Der Inzidenzraum aus (1.1.3) ist ebenfalls eine affine Ebene. Es gibt vier Klassen paralleler Geraden (also $|\mathfrak{G}/_{\|}| = 4$).

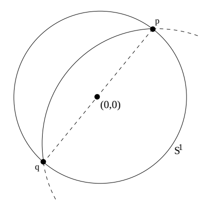
(3) Für einen Körper K sei $A := K^2$ und $\mathfrak{G} := \{a + bK \mid a \in K^2, b \in (K^2)^*\}$. Dann ist $\mathrm{AG}(2,K) := (A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene, genannt *affine Koordinatenebene* über K.

Beweis: (I1), (I2) aus (1.1.6).

(E3) ist klar (z.B. $(0,0),(0,1),(1,0)$).

(P) Sei $x \in A$ und $G = a + bK \in \mathfrak{G}$ mit $x \notin G$. Dann folgt $x + bK \cap a + bK = \emptyset$. Um die Eindeutigkeit zu zeigen ist $x + cK \cap a + bK \neq \emptyset$ für $cK \neq bK$ (also b, c linear unabhängig) nachzuweisen. Gesucht sind also Lösungen (λ, μ) für $x + c\lambda = a + b\mu$ (bzw. äquivalent: $c\lambda - b\mu = a - x$). Da (b, c) eine Basis des K^2 ist, existieren die λ, μ eindeutig $\Rightarrow |x + cK \cap a + bK| = 1 \neq 0$.

(4) Sei $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{S}^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ ihr Rand. Sei weiter $\mathcal{K}$ die Menge aller Kreise und Geraden in $\mathbb{R}^2$, die $\mathbb{S}^1$ symmetrisch zum Ursprung schneiden, d.h. es gibt zwei Schnittpunkte p, q und es gilt $q = -p$. Sei $\mathfrak{G} := \{K \cap D \mid K \in \mathcal{K}\}$, dann ist $(D, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene. Übung.



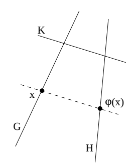
Satz 2.3 Seien $G, H \in \mathfrak{G}$ mit $G \cap H = x \in A$, dann gilt $\forall G' \in [G], H' \in [H]: \ |G' \cap H'| = 1$.

Beweis: Angenommen $|G' \cap H'| \neq 1$, also $G' = H'$ oder $G' \cap H' = \emptyset$, d.h. $G' \| H'$. Wegen $G \| G', H \| H'$ folgt mit (2.1) $G \| H$, im Widerspruch zu $G \cap H = x$. □

Satz 2.4 Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene und $G, H, K \in \mathfrak{G}$ mit $G, H \nparallel K$. Dann gelten:

(1) $\varphi : G \to H;\ x \mapsto \{x \| K\} \cap H$ ist eine Bijektion, genannt *Parallelperspektivität* (mit *Richtung* K).

(2) $|G| = |H| = |[G]|$



Beweis: (1) φ ist wohldefiniert wegen (2.3) ($\Rightarrow |\{x \| K\} \cap H| = 1$).

Injektivität: Zu $x, y \in G$ sei $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \{x \| K\} = \{\varphi(x) \| K\} = \{\varphi(y) \| K\} = \{y \| K\} \Rightarrow x = \{x \| K\} \cap G = \{y \| K\} \cap G = y$ (denn $G \nparallel K$).

Surjektivität: Sei $z \in H$ und $y := \{z \| K\} \cap G \Rightarrow \varphi(y) = \{y \| K\} \cap H = \{z \| K\} \cap H = z$.

(2) $|G| = |H|$ folgt aus (1). Natürlich kann man ebenso $|K| = |G|$ zeigen. Betrachte die Abbildung $\psi : [G] \to K;\ G' \mapsto G' \cap K$.

ψ ist wohldefiniert, denn $|G \cap K| = 1 \Rightarrow |G' \cap K| = 1\ \forall G' \in [G]$ (wegen (2.3)).

ψ ist injektiv: sei $\psi(G_1) = \psi(G_2)$ für $G_1, G_2 \in [G]$. Dann gilt $G_1 = \{\psi(G_1) \| G\} = \{\psi(G_2) \| G\} = G_2 \Rightarrow G_1 = G_2$.

ψ ist surjektiv: sei $p \in K$. Dann ist $G' = \{p \| G\} \in [G]$ und es gilt $\psi(G) = p$.

Also ist ψ eine Bijektion $[G] \to K$, also gilt $|[G]| = |K| = |G| = |H|$. □

Satz 6.3 Sei K ein Körper und $(A, \mathfrak{G}) := \mathrm{AG}(2, K)$. Für alle $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(2, K)$ und $a \in K^2$ sind $\sigma : A \to A$ und $\tau_a : A \to A;\ x \mapsto x + a$ Automorphismen von $(A, \mathfrak{G})$.

Beweis: $\tau_a \in \mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G})$ ist klar ($\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$). Seien $a \in (K^2)^*, b \in K^2$. Dann gilt

$$\sigma(aK + b) = \sigma(aK) + \sigma(b) = \sigma(a)\widehat{\sigma}(K) + \sigma(b) = \sigma(a)K + \sigma(b) \in \mathfrak{G}.$$

Das gilt auch für σ^{-1}, also ist σ eine Kollineation. □

Bemerkung (1) (6.2) und (6.3) zeigen, daß Koordinatentransformationen die Geometrie nicht ändern. Der letzte Schritt im Beweis (3.9) ist damit gezeigt.

(2) In der Tat haben alle Automorphismen $\sigma' \in \mathrm{Aut}\,\mathrm{AG}(2, K)$ die Form $\sigma'(x) = \tau_a \circ \sigma(x) = \sigma(x) + a$ für $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(2, K)$ und $a \in K^2$. Der Beweis wird später geführt.

Satz 6.4 Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene mit projektivem Abschluß $(P, \mathfrak{G}')$ und Ferngerade F. Sei weiter $\alpha \in \mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G})$. Dann gilt:

(1) $\forall G, H \in \mathfrak{G}: \ G \| H \Leftrightarrow \alpha(G) \| \alpha(H)$.

(2) $\alpha^* : P \to P;\ x \mapsto \begin{cases} \alpha(x) & \text{falls } x \in A \\ [\alpha(G)] & \text{falls } x = [G] \in F \end{cases}$ ist ein Automorphismus von $(P, \mathfrak{G}')$.

(3) α^* ist die eindeutig bestimmte Fortsetzung von α (die Kollineation ist).

(4) Die Abbildung $\mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G}) \to \mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G}');\ \alpha \mapsto \alpha^*$ ist ein Monomorphismus (injektiver Homomorphismus).

Beweis: (1) "$\Rightarrow$": Seien $G \| H$ und $p \in \alpha(G) \cap \alpha(H)$. Dann folgt $\alpha^{-1}(p) \in G \cap H$, also $G = H \Rightarrow \alpha(G) \| \alpha(H)$. "$\Leftarrow$" aus Symmetriegründen.

(2) Wegen (1) ist α^* wohldefiniert und injektiv ($[\alpha(G)] = [\alpha(H)] \Leftrightarrow G \| H \Leftrightarrow [G] = [H]$). $(\alpha^{-1})^*$ ist Inverse von α^*, also ist α^* bijektiv.

α^* ist Kollineation: sei $K \in \mathfrak{G}'$.

1. Fall: $K = F \Rightarrow \alpha^*(F) = F \in \mathfrak{G}'$.

2. Fall: $K = G \cup \{[G]\}$ mit $G \in \mathfrak{G}$: $\alpha^*(G \cup \{[G]\}) = \alpha(G) \cup \{[\alpha(G)]\} \in \mathfrak{G}'$. Dasselbe gilt für $(\alpha^*)^{-1} = (\alpha^{-1})^*$.

(3) Für $\alpha' \in \mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G})$ mit $\alpha'|_A = \alpha$ gilt $\alpha'(G \cup \{[G]\}) = \alpha(G) \cup \{[\alpha(G)]\}$ (da Gerade!) $\Rightarrow \alpha'|_H = \alpha^*|_H\ \forall H \in \mathfrak{G}' \Rightarrow \alpha' = \alpha^*$.

(4) Injektivität ist klar (denn $\alpha^*|_A = \alpha$), Homomorphismuseigenschaft wie folgt: Es gilt $(\alpha^* \circ \beta^*)|_A = \alpha^*|_A \circ \beta^*|_A$, wegen (3) folgt $\alpha^* \circ \beta^* = (\alpha \circ \beta)^*$. □

Bemerkung (1) Wegen (6.4.4) kann man $\mathrm{Aut}\,A$ als Untergruppe von $\mathrm{Aut}\,P$ auffassen.

(2) Sei $(P, \mathfrak{G})$ projektive Ebene und $F \in \mathfrak{G}$. Für $\sigma \in \mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G})$ mit $\sigma(F) = F$ ist $\sigma|_{P_F} \in \mathrm{Aut}(P_F, \mathfrak{G}_F)$ und $(\sigma|_{P_F})^* = \sigma$ (vgl. 6.4.3).

Beweis: (1) Assoziativität ist klar, das neutrale Element ist id. σ^{-1} existiert (da σ bijektiv ist) und ist semilinear wegen $\sigma^{-1}(\sigma(v)+\sigma(w)) = \sigma^{-1}\sigma(v+w) = v+w = \sigma^{-1}\sigma(v)+\sigma^{-1}\sigma(w)$ und $\sigma^{-1}(\sigma(v)\widehat{\sigma}(\lambda)) = \sigma^{-1}(\sigma(v\lambda)) = v\lambda = \sigma^{-1}\sigma(v)\cdot\widehat{\sigma}^{-1}\widehat{\sigma}(\lambda)$.

(2) $\sigma(\tau(v\lambda)) = \sigma(\tau(v)\widehat{\tau}(\lambda)) = \sigma(\tau(v))\cdot\widehat{\sigma}(\widehat{\tau}(\lambda))$, also $\widehat{\sigma\circ\tau} = \widehat{\sigma}\circ\widehat{\tau}$.

(3) Betrachte $\sigma' = \sigma\widetilde{\widehat{\sigma^{-1}}}$: wegen $\widetilde{\widehat{\sigma^{-1}}} \in \Gamma\mathrm{L}(V,K)$ ist σ' semilinear und es gilt:

$$\sigma'(v\lambda) = \sigma\widetilde{\widehat{\sigma^{-1}}}(v\lambda) = \sigma(\widetilde{\widehat{\sigma^{-1}}}(v)\cdot\widehat{\widetilde{\widehat{\sigma^{-1}}}}(\lambda)) = \sigma(\widetilde{\widehat{\sigma^{-1}}}(v)\cdot\widehat{\sigma^{-1}}(\lambda)) = \sigma'(v)\cdot\widehat{\sigma}\widehat{\sigma^{-1}}(\lambda) = \sigma'(v)\lambda.$$

Also $\widehat{\sigma'} = \mathrm{id}$ und $\sigma' \in \mathrm{GL}(V,K)$. Aus $\sigma' = \sigma\widetilde{\widehat{\sigma^{-1}}} = \sigma\widetilde{\widehat{\sigma}^{-1}} = \sigma\widetilde{\widehat{\sigma}}^{-1}$ folgt $\sigma = \sigma'\widetilde{\widehat{\sigma}}$. □

Bemerkung (1) Im Fall $K \in \{\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ gilt $\operatorname{Aut} K = \{\mathrm{id}\}$ (Algebra!), also $\Gamma\mathrm{L}(V,K) = \mathrm{GL}(V,K)$. In den Fällen $K = \mathbb{C}$ oder $K = \mathrm{GF}(p^n), n > 1$ gilt jedoch $\operatorname{Aut} K \neq \{\mathrm{id}\}$.

(2) Wie im Beweis von (6.1.3), kann man auch die Bemerkung im obigen Beispiel (3) zeigen.

Im Fall $V = K^n$ schreibt man $\Gamma\mathrm{L}(n,K) = \Gamma\mathrm{L}(V,K)$.

Satz 6.2 Sei K ein Körper und $(P,\mathfrak{G}) = \mathrm{PG}(2,K)$. Für jedes $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(3,K)$ ist $\overline{\sigma} : P \to P;\ aK \mapsto \sigma(a)K$ ein Automorphismus von $(P,\mathfrak{G})$, die von σ *induzierte Kollineation*. Die Abbildung $\Gamma\mathrm{L}(3,K) \to \mathrm{Aut}(P,\mathfrak{G});\ \sigma \mapsto \overline{\sigma}$ ist ein Homomorphismus bzgl. $\circ$ mit Kern $\rho_K := \{\rho_\lambda \mid \lambda \in K^*\}$ (wenn $\rho_\lambda(x) = x\lambda$).

Beweis: $\overline{\sigma}$ ist wohldefiniert: $aK = bK \Leftrightarrow \exists\lambda \in K^* : a = b\lambda$ und

$$\overline{\sigma}(aK) = \sigma(a)K = \sigma(b\lambda)K = \sigma(b)\widehat{\sigma}(\lambda)K = \sigma(b)K = \overline{\sigma}(bK).$$

$\overline{\sigma}$ ist bijektiv: $\overline{\sigma^{-1}}$ ist Umkehrabbildung von $\overline{\sigma}$.

Seien $a, b \in K^3$ linear unabhängig und $\lambda, \mu \in K$. Dann gilt

$$\sigma(a\lambda + b\mu) = \sigma(a\lambda) + \sigma(b\mu) = \sigma(a)\widehat{\sigma}(\lambda) + \sigma(b)\widehat{\sigma}(\mu) \in \sigma(a)K + \sigma(b)K,$$

d.h. $\overline{\sigma}(aK+bK) \subseteq \sigma(a)K + \sigma(b)K$. Dasselbe gilt für $\overline{\sigma}^{-1}$, daher folgt $\overline{\sigma}(aK+bK) = \sigma(a)K + \sigma(b)K \in \mathfrak{G} \Rightarrow \overline{\sigma}$ ist eine Kollineation. (Hinweis: a, b linear unabhängig $\Leftrightarrow \sigma(a), \sigma(b)$ linear unabhängig).

Homomorphie von $\sigma \mapsto \overline{\sigma}$: Für $\sigma, \tau \in \Gamma\mathrm{L}(3,K)$ gilt

$$(\overline{\tau}\circ\overline{\sigma})(aK) = \overline{\tau}(\sigma(a)K) = (\tau\circ\sigma)(a)K = \overline{\tau\circ\sigma}(aK) \Rightarrow \overline{\tau}\circ\overline{\sigma} = \overline{\tau\circ\sigma}.$$

Sei nun $\sigma \in \mathrm{Kern}^{-}$, d.h. $\overline{\sigma}(aK) = \sigma(a)K = aK\ \forall a \in K^3$. Dann existiert für alle $a \in K^3$ ein $\lambda_a \in K$ mit $\sigma(a) = a\lambda_a$. Zu zeigen ist $\lambda_b = \lambda_a\ \forall b \in K^3$. Seien zunächst $a, b \in K^3$ linear unabhängig. Dann gilt

$$a\lambda_{a+b} + b\lambda_{a+b} = (a+b)\lambda_{a+b} = \sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b) = a\lambda_a + b\lambda_b \Rightarrow \lambda_a = \lambda_{a+b} = \lambda_b.$$

Zu linear abhängigen a, b wähle $c \in K^3$ mit b, c linear unabhängig und a, c, linear unabhängig $\Rightarrow \lambda_b = \lambda_c = \lambda_a$. D.h. λ_a ist unabhängig von a, etwa $\lambda := \lambda_a \Rightarrow \sigma(a) = a\lambda = \rho_\lambda(a)\ \forall a \in K^3 \Rightarrow \sigma = \rho_\lambda \Rightarrow \mathrm{Kern}^{-} \subseteq \rho_K$. Die andere Inklusion ist trivial. □

Definition Sei $(A,\mathfrak{G})$ eine affine Ebene, dann heißt $|G|$ für $G \in \mathfrak{G}$ die *Ordnung* von A, bezeichnet mit $\operatorname{ord} A = |G|$. Wohldefiniertheit ist durch Satz (2.4) sichergestellt.

Beispiel (1) $\operatorname{ord} = 2$: siehe Beispiel (2.2.1) bzw. (1.1.1).

(2) $\operatorname{ord} = 3$: siehe Beispiel (2.2.2) bzw. (1.1.3).

(3) $\operatorname{ord}(\mathrm{AG}(2,\mathbb{R})) = |\mathbb{R}|$, also (überabzählbar) unendlich.

(4) Im Inzidenzraum von Beispiel (1.1.5) ist für $n \geq 3$ keine Ordnung definiert.

Satz 2.5 Sei $(A,\mathfrak{G})$ eine affine Ebene der Ordnung $q \in \mathbb{N}$. Es gilt dann $\forall x \in A, \forall G \in \mathfrak{G}$:

(0) $|G| = q$

(1) $|[G]| = q$

(2) $|\{H \in \mathfrak{G} \mid x \in H\}| = q + 1$

(3) $|A| = q^2$

(4) $|\mathfrak{G}/_{\parallel}| = q + 1$

(5) $|\mathfrak{G}| = q^2 + q$

Beweis: (0) nach Definition von ord.

(1) nach Satz (2.4.2).

(2) Wähle $K \in \mathfrak{G}$ mit $x \notin K$. $\forall y \in K$ ist $\overline{x,y}$ eine Gerade durch x, dazu kommt $\{x\|K\}$, so daß es mindestens $q+1$ Geraden durch x gibt. Da jede Gerade durch x entweder parallel zu K ist oder K trifft, sind es genau $q+1$.

(3) $[G]$ ist eine Partition von A, d.h. $A = \bigcup_{K\in[G]} K$ und für $K, K' \in [G]$ gilt $K = K'$ oder $K \cap K' = \emptyset \Rightarrow |A| = \sum_{K\in[G]} |K| = q \cdot q = q^2$.

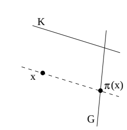
(4) Zu $H, H' \in \{K \in \mathfrak{G} \mid x \in K\}$ sind $[H], [H'] \in \mathfrak{G}/_{\parallel}$ und $H \neq H' \Rightarrow [H] \neq [H']$. Somit gibt es mindestens $q+1$ Parallelklassen. In jeder Parallelklasse gibts es ein Element, das durch x läuft, also sind es genau $q+1$.

(5) $|\mathfrak{G}| = |\mathfrak{G}/_{\parallel}| \cdot |[G]| = (q+1)\cdot q = q^2 + q$. □

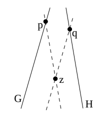
Definition Seien $(A,\mathfrak{G})$ eine affine Ebene und $G, K \in \mathfrak{G}$ mit $G \nparallel K$. Die (offensichtlich wohldefinierte und surjektive) Abbildung

$$\pi : A \to G;\ x \mapsto \{x\|K\} \cap G$$

heißt *Parallelprojektion* (mit *Richtung* K).



Definition Seien $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene, $G, H \in \mathfrak{G}$ und $z \in A \setminus (G \cup H)$. Für $G \nparallel H$ sei $q := \{z \| G\} \cap H$ und $p := \{z \| H\} \cap G$. Die bijektive Abbildung



$$\xi : G \setminus \{p\} \to H \setminus \{q\};\ x \mapsto \overline{x, z} \cap H$$

heißt *zentrale Perspektivität*. Für $G \| H$ ist

$$\xi : G \to H;\ x \mapsto \overline{x, z} \cap H$$

wohldefiniert und bijektiv (und heißt ebenfalls *zentrale Perspektivität*).

Bemerkung Die Herausnahme der Punkte p, q stellt sicher, daß ξ im Fall $G \nparallel H$ wohldefiniert, d. h. jeder Punkt aus $G \setminus \{p\}$ hat ein Bild, und surjektiv ist, d. h. jeder Punkt aus $H \setminus \{q\}$ hat ein Urbild.

Durch die Hinzunahme von neuen Punkten und einer neuen Geraden zur affinen Ebene $(A, \mathfrak{G})$ kann bei der zentralen Perspektivität auf die lästigen Ausnahmepunkte und die Fallunterscheidung verzichtet werden.

Definition Der *projektive Abschluß* $(P, \mathfrak{G}')$ einer affinen Ebene $(A, \mathfrak{G})$ ist folgendermaßen definiert: ergänze jede Gerade $G \in \mathfrak{G}$ um einen Punkt $[G]$, genannt *Fernpunkt* von G, also $G' := G \cup \{[G]\}$. (Beachte, daß parallele Geraden denselben Fernpunkt bekommen!) Weiter sei $F := \mathfrak{G}/_{\|} = \{[G] \mid G \in \mathfrak{G}\}$ eine zusätzliche Gerade, genannt *Ferngerade*. Dann sei

$$(P, \mathfrak{G}') := \Big(A \cup F, \Big\{G \cup \{[G]\} \mid G \in \mathfrak{G}\Big\} \cup \{F\}\Big).$$

Bemerkung (1) Im Beispiel (1.1.1) ergibt sich das Beispiel (1.1.4).

(2) Im Beispiel (2.2.4) kann man sich die Fernpunkte als Punkte auf $\mathbb{S}^1$ vorstellen.

Satz 2.6 Der projektive Abschluß $(P, \mathfrak{G}')$ einer affinen Ebene $(A, \mathfrak{G})$ ist ein Inzidenzraum mit

(1) $\forall G' \in \mathfrak{G}'$ gilt $|G'| \geq 3$

(2) $\forall G', H' \in \mathfrak{G}', G' \neq H'$, gilt $|G' \cap H'| = 1$

Beweis: (I1) Seien $x, y \in P, x \neq y$.

1. Fall: $x, y \in A \Rightarrow \overline{x, y} \cup \{\boxed{x, y}\}$ ist eine Verbindungsgerade, da aber $x, y \notin F$ ist es auch die einzige.

2. Fall: $x \in A, y \notin A \Rightarrow y = [G]$ für $G \in \mathfrak{G}$ und wegen (P) ist $\{x \| G\} \cup \{[G]\}$ die Verbindungsgerade.

3. Fall: $x, y \notin A \Rightarrow x, y \in F$ und F ist die Verbindungsgerade von x, y in P.

(I2) und (1) sind klar, weil (2.5.0) $\Rightarrow \forall G \in \mathfrak{G} : |G \cup \{[G]\}| \geq 3$ und (2.5.4) $\Rightarrow |F| \geq 3$.

6 Automorphismen

6.1 . . . in koordinatisierten Ebenen

In diesem Abschnitt sollen Beispiele von Automorphismen in affinen und projektiven Koordinatenebenen beschrieben werden. Die Frage, wie man alle beschreiben kann, werden wir später in allgemeinerem Zusammenhang behandeln.

Seien (V, K) und (V', K') Vektorräume über Körpern K bzw. K' und $\widehat{\sigma} : K \to K'$ ein Körperisomorphismus. Eine Abbildung $\sigma : V \to V'$ heißt *semilinear* mit *Begleitisomorphismus* $\widehat{\sigma}$, wenn für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

$$\sigma(v + w) = \sigma(v) + \sigma(w) \qquad \text{und} \qquad \sigma(v\lambda) = \sigma(v)\widehat{\sigma}(\lambda)$$

Bemerkung (1) Falls $\sigma \neq 0$ (d.h. es gibt ein $v \in V$ mit $\sigma(v) \neq 0$), so ist $\widehat{\sigma}$ durch σ eindeutig bestimmt.

(2) Meist gilt $K = K'$ und $\widehat{\sigma} \in \operatorname{Aut} K$.

Beispiel (1) Im Fall $K = K'$ ist jede lineare Abbildung $\sigma : V \to V'$ semilinear mit $\widehat{\sigma} = \mathrm{id}$.

(2) Sei $\alpha : K \to K'$ ein Körperisomorphismus und $n \in \mathbb{N}$, dann ist

$$\widetilde{\alpha} : K^n \to K'^n;\ (x_1, \ldots, x_n)^T \mapsto (\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n))^T$$

eine (bijektive) semilineare Abbildung mit Begleitisomorphismus α.

Um eine analoge Abbildung $V \to V'$ für beliebige K- bzw. K'-Vektorräume zu definieren, müssen Basen für V und V' gewählt werden.

(3) Allgemeiner: Sei wieder $\alpha : K \to K'$ ein Körperisomorphismus und $M \in \mathrm{GL}(n, K')$, dann ist $K^n \to K'^n;\ x \mapsto M\widetilde{\alpha}(x)$ eine (bijektive) semilineare Abbildung mit Begleitisomorphismus α. (So kann man sogar alle bijektiven semilinearen Abbildungen beschreiben!)

(4) $\rho_\mu : K^n \to K^n;\ (x_1, \ldots, x_n)^T \mapsto (x_1\mu, \ldots, x_n\mu)^T,\ \mu \in K$, ist semilinear mit $\widehat{\rho_\mu}(\lambda) = \mu^{-1}\lambda\mu$. Ist K kommutativ, dann ist ρ_μ natürlich linear.

Satz 6.1 Sei (V, K) ein Vektorraum. Dann gilt:

(1) Die Menge $\Gamma\mathrm{L}(V, K)$ aller bijektiven semilinearen Abbildungen $V \to V$ bildet eine Gruppe (mit $\widehat{\sigma^{-1}} = \widehat{\sigma}^{-1}$).

(2) Für $\sigma, \tau \in \Gamma\mathrm{L}(V, K)$ gilt $\widehat{\sigma \circ \tau} = \widehat{\sigma} \circ \widehat{\tau}$. D.h. $\widehat{\ } : \Gamma\mathrm{L}(V, K) \to \operatorname{Aut} K;\ \sigma \mapsto \widehat{\sigma}$ ist ein Homomorphismus mit Kern $\mathrm{GL}(V, K)$.

(3) Zu jedem $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(V, K)$ existiert $\sigma' \in \mathrm{GL}(V, K)$ mit $\sigma = \sigma'\widetilde{\widehat{\sigma}}$.

Beweis: Sei eine Konfiguration wie in (PD) gegeben. Setze $L = \overline{p_1, p_2}$. Zu zeigen ist $p_3 \in L$. Die affine Ebene P_L ist pappussch, also nach dem Satz von Hessenberg (4.3) desarguessch. Daraus folgt $p_3 \in L$. Wegen (5.7) (oder (4.4)) ist K kommutativ. □

Satz 5.12 Sei $(P, \mathfrak{G})$ eine projektive Ebene und $L \in \mathfrak{G}$ beliebig. Dann gilt:

$$P \text{ desarguessch (pappussch)} \Leftrightarrow P_L \text{ desarguessch (pappussch)}$$

Speziell ist der projektive Abschluß einer affinen desarguesschen (pappusschen) Ebene wieder desarguessch (pappussch).

Beweis: Nur „$\Leftarrow$“ ist zu zeigen: sei P_L desarguessch (pappussch). Wegen (5.6) bzw. (5.7) ist $P_L \cong \mathrm{AG}(2, K)$ für einen (kommutativen) Körper K. Dann gilt $P \cong \mathrm{PG}(2, K)$ und wegen (5.9) ist P desarguessch (pappussch). □

Satz 5.13 Jede endliche desarguessche projektive Ebene ist pappussch.

Beweis: ergibt sich aus (5.8) und (5.12). □

Bemerkung (1) Eine zu (5.12) analoge Aussage mit (Ad) und (Pd) ist falsch. Genauer: Die affine Ebene $A(F^2)$ über einem planaren Fastkörper F erfüllt (Ad), der projektive Abschluß P ist aber keine Moufangebene. Wenn H die Ferngerade bezeichnet, so gilt (Pd) nur für die Achse H.

(2) Bildet man in der obigen Bemerkung P_G mit einer Geraden $G \neq H$, so ist $P_G \ncong P_H$. Vgl. Übung und Punkt (3) der Bemerkung zwischen (3.4) und (3.5).

(3) Aus (PD) folgt nach (4.2.2) wie im Beweis von (5.11) die zu (PD) duale Aussage (PD’). (Beachte: die Figur ist dieselbe wie für (PD)!).

Durch Übergang zur dualen Ebene erkennt man, daß auch (PD’) $\Rightarrow$ (PD) gilt. Das liefert einen gültigen Beweis für (AD’) $\Rightarrow$ (AD). Außerdem zeigt es, daß die Klasse der desarguesschen projektiven Ebenen *selbstdual* ist, d.h. auch die duale Ebene ist wieder desarguessch. Daher ist das Dualitätsprinzip auf diese Klasse anwendbar.

(4) Aufgabe 12 und (5.12) zeigen, daß auch die Klasse der pappusschen projektiven Ebenen selbstdual ist.

(5) Die Konstruktion des Körpers geht auf Hilbert[6] (1899) zurück. Nach Hilbert wird sie auch *Streckenrechnung* genannt. Später wurden mit modifizierten Methoden auch nichtdesarguessche Ebenen koordinatisiert (mit sog. *Ternärkörpern* (Hall 1943)).

[6] David Hilbert 1862–1943

(2) 1. Fall: $G' \neq F \neq H'$. Seien $G, H \in \mathfrak{G}$ mit $G' = G \cup \{[G]\}$, $H' = H \cup \{[H]\}$. Dann folgt entweder $G \| H$ und $G' \cap H' = [G]$ $(= [H])$ oder $G \nparallel H$ und $|G \cap H| = 1$ (beachte $[G] \neq [H]$).

2. Fall: o.B.d.A. sei $H' = F \Rightarrow G' \cap H' = G' \cap F = [G]$. □

3 Projektive Ebenen

Wir wollen nun die Eigenschaften des projektiven Abschlußes einer affinen Ebene axiomatisch erfassen.

Definition Ein Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G})$ heißt *projektive Ebene*, wenn gilt:

(I3) $\forall G \in \mathfrak{G}$ gilt $|G| \geq 3$

(I4) $\forall G, H \in \mathfrak{G}$ gilt $G \cap H \neq \emptyset$

(E3) Es gibt drei nicht kollineare Punkte.

$(P, \mathfrak{G})$ heißt *verallgemeinerte projektive Ebene*, wenn (nur) (I4) und (E3) erfüllt sind.

Bemerkung Aus (I1) und (I4) ergibt sich sofort $G \neq H \Rightarrow |G \cap H| = 1$.

Beispiel 3.1 (1) wegen (2.6) ist der projektive Abschluß jeder affinen Ebene eine projektive Ebene.

(2) Minimalmodell: (1.1.4) ist der projektive Abschluß von (1.1.1), die Ferngerade F ist gestrichelt dargestellt. Es gibt keine projektive Ebene $(P, \mathfrak{G})$ mit $|P| < 7$.

(3) Jeder near-pencil ist eine verallgemeinerte projektive Ebene, aber keine projektive Ebene.

(4) (1.1.7) ist eine projektive Ebene (Übung).

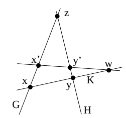
(5) allgemeiner: sei K ein beliebiger Körper, $P = \{aK \mid a \in (K^3)^*\}$ und $\mathfrak{G} = \{aK + bK \mid a, b \in K^3 \text{ linear unabhängig}\}$. Dann ist $\mathrm{PG}(2, K) := (P, \mathfrak{G}, \subseteq)$ eine projektive Ebene. Übung.

Satz 3.2 Sei $(P, \mathfrak{G})$ eine verallgemeinerte projektive Ebene. Dann gilt:

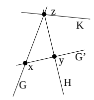
(1) Falls $\exists G, H \in \mathfrak{G}, G \neq H,\ |G|, |H| \geq 3$, dann ist $(P, \mathfrak{G})$ projektive Ebene.

(2) $(P, \mathfrak{G})$ ist projektive Ebene oder near-pencil.

Beweis: (1) Sei $K \in \mathfrak{G}$ mit $K \neq G, H$, dann ist $|K| \geq 3$ zu zeigen. Sei $z = G \cap H$.



1. Fall: $z \notin K$. Seien $x = K \cap G$ und $y = K \cap H$. $|G|, |H| \geq 3 \Rightarrow \exists x' \in G \backslash \{x, z\}, \exists y' \in H \backslash \{y, z\}$. Wegen (I4) existiert $w = \overline{x', y'} \cap K$ (und $w \neq x, y$ wegen $G, H \neq K$) $\Rightarrow \{w, x, y\} \subseteq K \Rightarrow |K| \geq 3$.



2. Fall: $z \in K$. Zu $x \in G \setminus \{z\}, y \in H \setminus \{z\}$ sei $G' := \overline{x, y} \overset{\text{Fall 1}}{\Longrightarrow} |G'| \geq 3$ und G', H, K liegen wie in Fall 1. Also $|K| \geq 3$.

(2) folgt direkt aus (1). $\square$

Der Prozess des projektiven Abschließens kann umgekehrt werden:

Satz 3.3 Sei $(P, \mathfrak{G})$ eine projektive Ebene und $F \in \mathfrak{G}$. Setze $P_F := P \setminus F$ und $\mathfrak{G}_F := \{G \setminus F \mid G \in \mathfrak{G} \setminus \{F\}\}$. Dann gilt:

(1) $(P_F, \mathfrak{G}_F)$ ist eine affine Ebene.

(2) Für $G, H \in \mathfrak{G} \setminus \{F\}$ gilt $(G \setminus F) \| (H \setminus F) \Leftrightarrow G \cap F = H \cap F$.

(3) Der projektive Abschluß von $(P_F, \mathfrak{G}_F)$ ist auf natürliche Weise isomorph zu $(P, \mathfrak{G})$.

Beweis: (1) (I1) Sei $x, y \in P_F, x \neq y$. $\exists_1 G \in \mathfrak{G}$ mit $x, y \in G, G \neq F$, und $x, y \in G \setminus F$.

(I2) folgt aus (I3), da $G \setminus F = G \setminus (G \cap F)$.

(E3) Seien $a, b, c \in P$ nicht kollinear und o.B.d.A. $a \notin F$. Wegen (I3) $\exists b' \in \overline{a, b} \setminus F, b' \neq a$, und $c' \in \overline{a, c} \setminus F, c' \neq a$, und $a, b', c' \in P_F$ sind nicht kollinear.

(P) Sei $G \in \mathfrak{G} \setminus \{F\}$ und $x \in P_F, x \notin G$. Mit $z = G \cap F$ erfüllt $H := \overline{x, z} \setminus F$ die Bedingungen $x \in H \in \mathfrak{G}_F$ und $H \cap (G \setminus F) = \emptyset \Rightarrow \boxed{\exists}$.

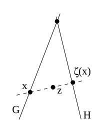
Für $K \in \mathfrak{G}$ mit $x \in K$ und $K \neq \overline{x, z}$ gilt $K \cap G \notin F \Rightarrow K \setminus F \cap G \setminus F \neq \emptyset \Rightarrow \boxed{\text{E}}$.

(2) Der Beweis von (P) zeigt auch (2).

(3) Übung. $\square$

Satz 3.4 Sei $(P, \mathfrak{G})$ eine projektive Ebene, $G, H \in \mathfrak{G}$, $G \neq H$, und $z \in P \backslash \{G \cup H\}$. Dann gilt:

(1) $\zeta : G \to H;\ x \mapsto \overline{x, z} \cap H$ ist eine Bijektion, genannt *zentrale Perspektivität.*



(2) $|G| = |H|$

Beweis: Übung. $\square$

Beweis: Wegen (5.6) wird die Ebene durch einen endlichen Körper koordinatisiert. Nach einem berühmten Satz von Wedderburn (1905) ist jeder endliche Körper kommutativ. Wegen (4.4) gilt (AP). $\square$

Bemerkung Tatsächlich ist K aus (5.6) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Beweis später.

5.1 Schließungssätze in projektiven Ebenen

Definition Eine projektive Ebene $(P, \mathfrak{G})$ heißt *desarguessch*, wenn das folgende *projektive Axiom von Desargues* erfüllt ist:

(PD) Zu $G_1, G_2, G_3 \in \mathfrak{G}$, verschieden und kopunktal, sei $z = G_1 \cap G_2 \cap G_3$. Seien $a_i, b_i \in G_i \backslash \{z\}$ verschieden. Dann liegen $\overline{a_i, a_j} \cap \overline{b_i, b_j}, i \neq j$, kollinear. Setzt man $p_k = \overline{a_i, a_j} \cap \overline{b_i, b_j}$ für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, so gilt also $p_3 \in L := \overline{p_1, p_2}$.

z heißt *Zentrum*, L heißt *Achse* der Desargues-Konfiguration. Die Konfiguration heißt „*kleiner projektiver Desargues*" (Pd), wenn $z \in L$. Eine projektive Ebene heißt *Moufang-Ebene*, wenn stets (Pd) gilt.

Definition Eine projektive Ebene $(P, \mathfrak{G})$ heißt *pappussch*, wenn das folgende *projektive Axiom von Pappos* erfüllt ist:

(PP) Sei $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$ mit $z = G_1 \cap G_2$ und $a_1 \dots a_6 \in P$, verschieden, mit $a_1, a_3, a_5 \in G_1 \setminus \{z\}$ und $a_2, a_4, a_6 \in G_2 \backslash \{z\}$. Dann liegen $\overline{a_1, a_2} \cap \overline{a_5, a_6}, \overline{a_2, a_3} \cap \overline{a_4, a_5}, \overline{a_1, a_4} \cap \overline{a_3, a_6}$ kollinear.

Bemerkung Ist $(P, \mathfrak{G})$ eine desarguessche bzw. pappussche projektive Ebene, so ist P_L offenbar desarguessch bzw. pappussch für jedes $L \in \mathfrak{G}$. Ist P eine Moufang-Ebene, so gilt (Ad) in jedem P_L. Daß teilweise (aber nicht immer) die Umkehrungen gelten, werden wir noch sehen.

Satz 5.9 Für einen Körper K ist $\mathrm{PG}(2, K)$ stets desarguessch. Ferner ist $\mathrm{PG}(2, K)$ genau dann pappussch, wenn K ist kommutativ ist.

Beweis: Übung.

Satz 5.10 (*Darstellungssatz*) Sei $(P, \mathfrak{G})$ eine desarguessche projektive Ebene, dann existiert ein Körper K mit $(P, \mathfrak{G}) \cong \mathrm{PG}(2, K)$.

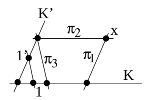
Beweis: Zu $L \in \mathfrak{G}$ betrachte die desarguessche affine Ebene P_L. Nach (5.6) existiert ein Körper K mit $P_L \cong \mathrm{AG}(2, K)$. Der projektive Abschluß von P_L ist einerseits nach (3.3.3) (vgl. Aufgabe 9) isomorph zu $(P, \mathfrak{G})$, andererseits nach (3.8.2) isomorph zu $\mathrm{PG}(2, K)$. $\square$

Satz 5.11 Jede pappussche projektive Ebene $(P, \mathfrak{G})$ ist desarguessch und kann durch einen kommutativen Körper K koordinatisiert werden.

(2) Für die Assoziativität von „·“ wird (AD) ebenfalls benötigt (nicht aber für die Lösbarkeit von $ax = b$ und $ya = b$ nach x bzw. y, vgl. Aufgabe 14).

Es bleibt zu zeigen, daß $(A, \mathfrak{G})$ und $A(K^2)$ isomorph sind. Betrachte die Parallelprojektionen bzw. Parallelperspektivitäten

$$\pi_1 : A \to K;\ x \mapsto \{x \| K'\} \cap K$$
$$\pi_2 : A \to K';\ x \mapsto \{x \| K\} \cap K'$$
$$\pi_3 : K' \to K;\ x \mapsto \{x \| \overline{1, 1'}\} \cap K$$



Die Abbildung

$$\varphi : A \to K^2;\ x \mapsto \big(\pi_1(x), (\pi_3 \circ \pi_2)(x)\big)$$

ist offenbar bijektiv.

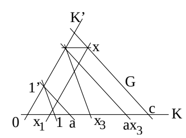
Satz 5.5 φ ist ein Isomorphismus

Beweis: Sei $G \in \mathfrak{G}$.

1. Fall: $G \| K'$, d.h. $\forall x \in G$ gilt $c = \pi_1(x)$ ist konstant, also $\varphi(G) \subseteq \langle c \rangle$. Umgekehrt gilt $\forall c \in K$: $\varphi^{-1}(\langle c \rangle) \subseteq \pi_1^{-1}(c) \| K'$.

2. Fall: $G \| K$, d.h. $\forall x \in G$ gilt $\pi_2(x) = c' \in K'$ ist konstant, also $\varphi(G) \subseteq \langle 0, \pi_3(c') \rangle$. Umgekehrt gilt $\forall c \in K$: $\varphi^{-1}(\langle 0, c \rangle) \subseteq \pi_2^{-1}(\pi_3^{-1}(c)) \| K$.

3. Fall: $G \not\| K, K'$. Sei $c = K \cap G$ und $a = \{1' \| G\} \cap K$. Für $x \in G$ setze $x_1 := \pi_1(x)$ und $x_2 := (\pi_3 \circ \pi_2)(x)$. Dann gilt $ax_2 + x_1 = c$, denn „+“ kann wegen (5.1) auch mit $\pi_2(x)$ (statt mit $1'$) konstruiert werden. Somit



$$x \in G \Rightarrow x_2 = a^{-1}c - a^{-1}x_1 \Rightarrow \varphi(x) \in \langle -a^{-1}, a^{-1}c \rangle$$

Ist $\varphi(x) \in \langle -a^{-1}, a^{-1}c \rangle$, so erhält man $ax_2 + x_1 = c$ und $x \in G$. Insgesammt gilt also $\varphi(G) = \langle -a^{-1}, a^{-1}c \rangle$ und $\varphi^{-1}(\langle -a^{-1}, a^{-1}c \rangle) = \{c \| \overline{a, 1'}\} \in \mathfrak{G}$. □

Zusammenfassend stellen wir fest:

Satz 5.6 (*Darstellungssatz*) Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine desarguessche affine Ebene. Dann existiert ein Körper K so, daß $(A, \mathfrak{G}) \cong \mathrm{AG}(2, K)$. □

Hieraus folgt mit (4.3) und (4.4):

Satz 5.7 Jede pappussche affine Ebene ist isomorph zu $\mathrm{AG}(2, K)$ mit einem kommutativen Körper K. (Genauer: jeder koordinatisierende Körper ist kommutativ).

Satz 5.8 Jede endliche desarguessche affine Ebene ist pappussch.

Für $G \in \mathfrak{G}$ heißt $|G| - 1$ die *Ordnung* der projektiven Ebene $(P, \mathfrak{G})$ (Bezeichnung $\operatorname{ord} P$). Wegen (3.4.2) ist das eine sinnvolle Definition.

Bemerkung (1) Jede affine Ebene hat die gleiche Ordnung wie ihr projektiver Abschluß. (Deswegen wird $|G| - 1$ als Ordnung der projektiven Ebene bezeichnet.)

(2) Jede projektive Ebene hat die gleiche Ordnung wie jede in ihr enthaltene affine Ebene (vergleiche 3.3.1).

(3) Diese sind aber i.A. nicht isomorph (im Unterschied zu (3.3.3)), da die Wahl der Geraden F willkürlich ist. Beispiele dazu werden wir später in den Übungen behandeln.

Satz 3.5 Sei $(P, \mathfrak{G})$ eine projektive Ebene der Ordnung $q \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $x \in P$ und $G \in \mathfrak{G}$:

(1) $|G| = q + 1$

(2) $|\{H \in \mathfrak{G} \mid x \in H\}| = q + 1$

(3) $|P| = q^2 + q + 1$

(4) $|\mathfrak{G}| = q^2 + q + 1$

Beweis: Alle Punkte ergeben sich aus (2.5), (3.3) und der Konstruktion des projektiven Abschluß. □

3.1 Dualität

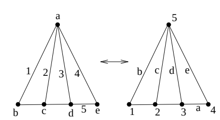
Definition Sei $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum. Das Tripel $(\mathfrak{G}, P, I')$ mit $GI'x :\Leftrightarrow xIG$ heißt *duale Inzidenzstruktur* zu $(P, \mathfrak{G}, I)$.

Beispiel (1) Die duale Inzidenzstruktur eines near-pencils ist wieder ein near-pencil.

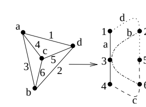
(2) Die duale Inzidenzstruktur von (1.1.1) ist kein Inzidenzraum (z.B. $\nexists \overline{3, 5}$).

(3) Die duale Inzidenzstruktur von (3.1.2) ist wieder eine projektive Ebene.

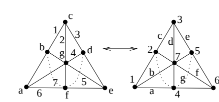
Falls $(\mathfrak{G}, P, I')$ ebenfalls ein Inzidenzraum ist (was i.A. nicht der Fall ist, da die Existenz von „Verbindungsgeraden“ nicht gesichert ist), bietet es sich an, um bei $I = \in$ auch $I' = \in$



Beispiel 1



Beispiel 2



Beispiel 3

wählen zu können, die duale Inzidenzstruktur geeignet zu schreiben: setze $\tilde{P} = \mathfrak{G}$, $\forall x \in P$: $\overline{x} := \{G \in \mathfrak{G} \mid x \in G\}$ und $\tilde{\mathfrak{G}} := \{\overline{x} \mid x \in P\}$. Dann ist $(\tilde{P}, \tilde{\mathfrak{G}}, \in)$ der zu $(P, \mathfrak{G}, \in)$ duale Inzidenzraum.

Es ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen P und $\tilde{P}$:

Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G}, \in)$	dualer Inzidenzraum $(\tilde{P}, \tilde{\mathfrak{G}}, \in)$
Punkt x	Gerade $\overline{x}$
Gerade G	Punkt G
Verbindungsgerade $\overline{x, y}$	Schnittpunkt $\overline{x} \cap \overline{y} = \overline{x, y}$
Schnittpunkt $G \cap H$	Verbindungsgerade $\overline{G \cap H}$

Insbesondere sind die Begriffe „kollinear“ und „kopunktal“ zueinander dual.

Bemerkung (1) Wegen (1.2) gibt es in der dualen Inzidenzstruktur eines Inzidenzraumes höchstens eine Verbindungsgerade zwischen zwei Punkten ($\Rightarrow \boxed{\text{E}}$ aus (I1)).

(2) Sei $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum. Gilt $|\mathfrak{G}| \neq 1$, dann ist (I2) auch in $(\mathfrak{G}, P, I')$ erfüllt.

(3) Sei $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum. $(\mathfrak{G}, P, I')$ ist Inzidenzraum $\Leftrightarrow$ $(P, \mathfrak{G}, I)$ ist verallgemeinerte projektive Ebene (denn (I1) $\Leftrightarrow$ (I4) und (I2) $\Leftrightarrow$ (E3)). Insbesondere gilt: $(P, \mathfrak{G}, I)$ und $(\mathfrak{G}, P, I')$ sind beide verallgemeinerte projektive Ebenen, oder beide nicht.

Satz 3.6 Sei $(P, \mathfrak{G}, \in)$ eine projektive Ebene, dann ist $(\mathfrak{G}, P, \ni)$ auch eine projektive Ebene, die zu $(P, \mathfrak{G}, \in)$ *duale Ebene*. Sie hat dieselbe Ordnung wie $(P, \mathfrak{G})$.

Beweis: Wegen obiger Bemerkung (3) ist nur (I3) zu zeigen. (I3) folgt direkt aus (3.5.2). Wegen (3.5) sind die Ordnungen gleich. □

Korollar 3.7 (*Dualitätsprinzip*) Ersetzt man in einem für alle projektiven Ebenen gültigen Satz

1. Punkte durch Geraden und Geraden durch Punkte
2. „Verbinden“ durch „Schneiden“ und „Schneiden“ durch „Verbinden“

so erhält man wieder einen Satz, der für alle projektiven Ebenen gilt.

3.2 Homogene Koordinaten

Untersucht wird der Zusammenhang zwischen $\mathrm{AG}(2, K)$ und $(P, \mathfrak{G}) = \mathrm{PG}(2, K)$ für einen Körper K. Sei $A := (0, 0, 1) + (1, 0, 0)K + (0, 1, 0)K$. Zusammen mit der üblichen Geradenstruktur ist $(A, \mathfrak{G}_A)$ eine affine Ebene. Betrachte die Abbildung $\iota : A \to P;\ x \mapsto xK$, die Punkte aus A auf Punkte aus P und entsprechend Geraden auf Geraden abbildet: für

Somit ist b linksinvers zu a. □

Bemerkung Die Beweise von (5.1) und (5.2) benutzen nur (Ad) in „Richtung K“, d. h. die (Träger-)Geraden G_i sind parallel zu K. (AD) wurde nicht verwendet.

Sei $K^* = K \setminus \{0\}$. Analog zu (5.1) und (5.2), aber mit (AD) statt (Ad) zeigt man:

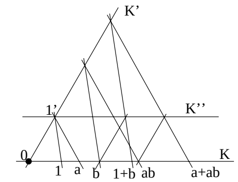
Satz 5.3 $(K^*, \cdot)$ ist eine Gruppe mit neutralem Element 1. Dabei ist μ_y für alle $y \in K$ unabhängig von der Wahl von $1'$.

Beweis: Übung.

Satz 5.4 $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Beweis: Wegen (5.2) und (5.3) sind nur noch die Distributivgesetze zu zeigen (die Kommutativität der Addition folgt dann). Zu $a, b \in K$ zeigen wir zunächst $a(1 + b) = a + ab$. Wende (Ad) auf $ab, b, \pi'(b), \pi''(ab), \pi''(b), \pi'(1 + b)$ an: Dann gilt

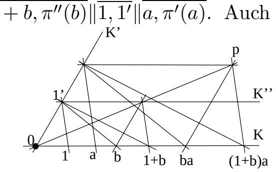
$$\overline{\pi''(ab), \pi'(1+b)} \| \overline{\pi'(b), ab} \| \overline{1', a} \| \overline{\pi''(ab), a + ab}$$



und daher $a + ab = \{\pi'(1+b) \| \overline{1', a}\} \cap K = a(1+b)$. Für $a, b, c \in K$ folgt das Linksdistributivgesetz:

$$a(b + c) = a(b(1 + b^{-1}c)) = ab(1 + b^{-1}c) = ab + abb^{-1}c = ab + ac.$$

Nun zeigen wir $(1 + b)a = a + ba$: Sei $p = \{\pi'(a) \| K\} \cap \overline{0, \pi''(b)}$. Wende (AD) an auf $1 + b, 1', \pi''(b), (1 + b)a, \pi'(a), p$, somit $\overline{p, (1 + b)a} \| \overline{1 + b, \pi''(b)} \| \overline{1, 1'} \| \overline{a, \pi'(a)}$. Auch die Punkte $b, 1', \pi''(b), ba, \pi'(a), p$ erfüllen die Voraussetzungen von (AD) und wir erhalten $\overline{ba, p} \| \overline{b, \pi''(b)} \| K'$. Wegen (5.1) kann man $a + ba$ mit $\pi'(a)$ statt mit $1'$ konstruieren, und man erhält $a + ba = \{p \| \overline{a, \pi'(a)}\} \cap K = (1+b)a$. Daraus folgt das Rechtsdistributivgesetz:



$$(b + c)a = ((1 + cb^{-1})b)a = (1 + cb^{-1})ba = ba + cb^{-1}ba = ba + ca$$

Aus den Distributivgesetzen folgt auch die Kommutativität der Addition: Seien $a, b \in K$, dann gilt

$$(a + b) + (a + b) = (a + b)(1 + 1) = (a + a) + (b + b),$$

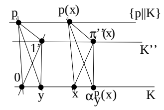
nach Kürzen von a auf der linken Seite und von b auf der rechten ergibt sich $b + a = a + b$. □

Bemerkung (0) In der Vorlesung wurden beim Beweis von (5.2) und (5.4) Addition und Multiplikation genau falschherum benutzt! Hier ist das korrigiert.

(1) Für das Linksdistributivgesetz ist wieder nur (Ad) erforderlich. Beim Beweis des Rechtsdistributivgesetzes wird (AD) wirklich benutzt.

Satz 5.1 $\alpha_y(x)$ ist unabhängig von der Wahl von $1'$.

Beweis: Sei $p \in A \setminus K$ und für alle $x \in K$ sei $p(x) := \{x \| \overline{0,p}\} \cap \{p \| K\}$ und $\alpha_y^p(x) = \{p(x) \| \overline{p,y}\} \cap K$. Zu zeigen ist $\alpha_y(x) = \alpha_y^p(x)$. Zunächst $p \notin K''$: $p, 0, 1', p(x), x, \pi''(x)$ erfüllen die Voraussetzungen von (Ad) für alle $x \Rightarrow \overline{p,1'} \| \overline{p(x), \pi''(x)} \Rightarrow y, p, 1', \alpha_y^p(x), p(x), \pi''(x)$ erfüllen (Ad) $\Rightarrow \overline{y,1'} \| \overline{\alpha_y^p(x), \pi''(x)} \Rightarrow \alpha_y(x) = \alpha_y^p(x)$. Für $p \in K''$ erfüllen $y, 1', 0, p,\ \alpha_y(x), \pi''(x), x, p(x)$ die Voraussetzungen des Scherensatzes (4.2.3). Somit gilt auch in diesem Fall $\alpha_y^p(x) = \alpha_y(x)$. □



Einschub Zur Definition einer Gruppe:

Lemma Sei $(G, \cdot)$ eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung und $e \in G$. Dann sind äquivalent:

(1) e ist neutrales Element und $\forall a \in G\ \exists\, a' \in G$ mit $a'a = e = aa'$

(2) e ist linksneutrales Element (d.h. $\forall a \in G:\ ea = a$) und $\forall a \in G\ \exists\, a'$ mit $a'a = e$.

(3) e ist rechtsneutrales Element und $\forall a \in G\ \exists\, a'$ mit $aa' = e$.

Beweis: Wegen Symmetrie genügt es (2) $\Rightarrow$ (1) zu zeigen. Sei also $a \in G$, dann gilt

$$aa' = (\underbrace{(a')' \cdot a'}_{e}) \cdot (aa') = (a')' \cdot (\underbrace{a'a}_{e}) \cdot a' = (a')' \cdot a' = e.$$

Desweiteren gilt $ae = a \cdot a'a = aa' \cdot a = ea = a$. □

Bemerkung Das Lemma gibt äquivalente Definitionen einer Gruppe. Wir werden es im Folgenden stets ohne Hinweis verwenden.

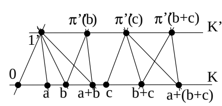
Satz 5.2 $(K, +)$ ist eine Gruppe mit neutralem Element 0.

Beweis: „+“ ist assoziativ: seien $a, b, c \in K$. Für

$$1', b, \pi''(b), a+b, \pi''(c), b+c, \pi''(b+c), a+(b+c)$$

ist der Scherensatz (4.2.3) anwendbar und dieser zeigt

$$\overline{1', a+b} \| \overline{\pi''(c), a+(b+c)}.$$



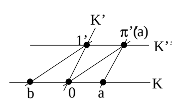
Daher hat man

$$(a+b)+c = \alpha_{a+b}(c) = \alpha_a(b+c) = a+(b+c).$$

Nach Definition gilt $\alpha_0 = \mathrm{id}$, d.h. $0 + x = x$ und 0 ist linksneutral.

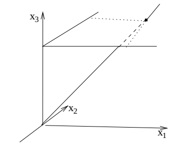
Für ein $a \in K$ sei $b := \{1' \| \overline{0, \pi''(a)}\} \cap K$, dann gilt

$$b + a = \alpha_b(a) = \{\pi''(a) \| \overline{1', b}\} \cap K = \overline{0, \pi''(a)} \cap K = 0.$$



$G = a + bK \in \mathfrak{G}_A$ gilt $\iota(G) = aK + bK \in \mathfrak{G}$, also ist $\iota(G)$ der von G erzeugte 2-dimensionale (da a, b linear unabhängig in K^3) Untervektorraum des K^3.

ι ist nicht surjektiv, denn Punkte $(a_1, a_2, 0)K \in P$ liegen nicht im Bild. Die Bilder der in A parallelen Geraden $a+bK$, $c+bK$ schneiden sich in $(b_1, b_2, 0)K$, dementsprechend ist $F := (1,0,0)K + (0,1,0)K \in \mathfrak{G}$ die Ferngerade in $\mathrm{PG}(2,K)$. Wir präzisieren das:



Satz 3.8 Sei K ein Körper, $(P, \mathfrak{G}) = \mathrm{PG}(2,K)$ und $(A, \mathfrak{G}_A) = \mathrm{AG}(2,K)$. Für die Abbildung $\iota : A \to P;\ (a_1, a_2) \mapsto (a_1, a_2, 1)K$, genannt *kanonische Einbettung*, gilt:

(1) ι ist injektiv

(2) $\forall a, b, c \in A$ gilt: a, b, c sind kollinear $\Leftrightarrow \iota(a), \iota(b), \iota(c)$ sind kollinear

(3) Sei $\tilde{P}$ der projektive Abschluß von A. Durch $\tilde{\iota}([bK]) := (b_1, b_2, 0)K$ für $\forall b \in (K^2)^*$ wird eine Fortsetzung $\tilde{\iota} : \tilde{P} \to P$ definiert (also $\tilde{\iota}_{|A} = \iota$), die ein Isomorphismus ist.

Beweis: Zu jedem Vektor $x = (x_1, x_2) \in A = K^2$ bezeichne x' den Vektor $(x_1, x_2, 1) \in K^3$.

(1) Sei $a, b \in A$ mit $\iota(a) = \iota(b) \Rightarrow a'K = b'K \Rightarrow a' = b'\lambda \Rightarrow \lambda = 1$ (wegen $a_3' = b_3' = 1$) $\Rightarrow a' = b' \Rightarrow a = b$.

(2) „$\Rightarrow$“: seien $a, b, c \in A$ verschieden und kollinear, dann $\exists \lambda \in K$ mit

$$\begin{aligned} c &= a + (b-a)\lambda = a(1-\lambda) + b\lambda \quad \Rightarrow \\ c' &= a'(1-\lambda) + b'\lambda \Rightarrow c'K \subseteq a'K + b'K \Rightarrow \iota(c) \subseteq \overline{\iota(a), \iota(b)}, \end{aligned}$$

und $\iota(a), \iota(b), \iota(c)$ sind kollinear.

„$\Leftarrow$“: seien $\iota(a), \iota(b), \iota(c)$ kollinear $\Rightarrow \exists \mu, \lambda \in K:\ c' = a'\mu + b'\lambda$. Es folgt $\mu + \lambda = 1$, denn $a_3' = b_3' = c_3' = 1$. Somit $c = a(1-\lambda) + b\lambda = a + (b-a)\lambda \Rightarrow a, b, c$ kollinear.

(3) $\tilde{\iota}$ ist für alle $p \in \tilde{P}$ definiert, denn $[bK]$ durchläuft alle Parallelklassen von A.

$\tilde{\iota}$ ist injektiv: sei $\tilde{\iota}([bK]) = \tilde{\iota}([cK])$ mit $b, c \in (K^2)^*$, d.h. $(b_1, b_2, 0)K = (c_1, c_2, 0)K \Rightarrow bK = cK \Rightarrow [bK] = [cK]$. Andere Fälle wegen (1) und Definition.

$\tilde{\iota}$ ist surjektiv: sei $aK \in P$.

1. Fall: $a_3 = 0$. Dann gilt $\tilde{\iota}([(a_1, a_2)K]) = aK$.

2. Fall: $a_3 \neq 0$. $\iota((a_1 a_3^{-1}, a_2 a_3^{-1})) = (a_1 a_3^{-1}, a_2 a_3^{-1}, 1)K = (a_1, a_2, a_3)K = aK$.

ι ist Kollineation: seien $a, b, c \in \tilde{P}$ verschieden und bezeichne F die Ferngerade von $\tilde{P}$:

„$\Rightarrow$“: seien a, b, c kollinear.

1. Fall: $\overline{a,b} \neq F$. O.B.d.A. $a, b \in A$. Falls $c \in A$ folgt die Behauptung mit (2). Falls $c \in F$, d.h. $c = [\overline{a,b}] = [a + (b-a)K] \Rightarrow \tilde{\iota}(c) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, 0)K = (b' - a')K \subseteq a'K + b'K = \overline{\iota(a), \iota(b)} \Rightarrow \tilde{\iota}(a),\ \tilde{\iota}(b),\ \tilde{\iota}(c)$ sind kollinear.

2. Fall: $a, b, c \in F \Rightarrow \tilde{\iota}(a), \tilde{\iota}(b), \tilde{\iota}(c)\, I\, \big((1,0,0)K + (0,1,0)K\big)$, also sind $\tilde{\iota}(a), \tilde{\iota}(b), \tilde{\iota}(c)$ kollinear.

„$\Leftarrow$“: seien $\tilde{\iota}(a), \tilde{\iota}(b), \tilde{\iota}(c)$ kollinear.

1. Fall: $\overline{\tilde{\iota}(a), \tilde{\iota}(b)} \neq (1,0,0)K + (0,1,0)K \Rightarrow$ o.B.d.A. $\tilde{\iota}(a) = a'K$, $\tilde{\iota}(b) = b'K$ und $\tilde{\iota}(c) = (a'\lambda + b'\mu)K$. Falls $\lambda = -\mu$ gilt $\tilde{\iota}(c) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, 0)K$ und $c = [(b-a)K] \Rightarrow c$ ist Fernpunkt der Geraden $\overline{a, b}$ in $\tilde{P}$, d.h. a, b, c sind kollinear. Falls $\lambda \neq -\mu$ o.B.d.A. $\lambda + \mu = 1$ (sonst beide geeignet skalieren), also $\tilde{\iota}(c) = (a'\lambda + b'(1-\lambda))K = ((a'-b')\lambda + b')K \Rightarrow c = (a-b)\lambda + b \Rightarrow a, b, c$ kollinear.

2. Fall: $\tilde{\iota}(a), \tilde{\iota}(b), \tilde{\iota}(c)\, I\, \big((1,0,0)K + (0,1,0)K\big) \Rightarrow a, b, c \in F \Rightarrow a, b, c$ kollinear. $\square$

Definition Sei $(P, \mathfrak{G}) = \mathrm{PG}(2, K)$. $(a_1 : a_2 : a_3)$ heißt *homogene Koordinaten* des Punktes $aK \in P$. Die Elemente a_1, a_2, a_3 sind nur bis auf Vielfache ($\neq 0$) aus K bestimmt, d.h. $(a_1 : a_2 : a_3) = (a_1\lambda : a_2\lambda : a_3\lambda)\ \forall \lambda \in K^*$. Im Fall $a_3 \neq 0$ bezeichnet $(a_1 : a_2 : a_3)$ den „affinen Punkt“ $(a_1 a_3^{-1}, a_2 a_3^{-1})$, für $a_3 = 0$ den Fernpunkt der affinen Geraden $(a_1, a_2)K$. Der affine Punkt (a_1, a_2) bekommt unter der kanonischen Einbettung die homogenen Koordinaten $(a_1 : a_2 : 1)$. ((a_1, a_2) sind die *inhomogenen Koordinaten* des Punktes $(a_1, a_2, 1)$). Beachte $(a_1 : a_2 : a_3) \neq (0 : 0 : 0)$, denn $a = 0 \Rightarrow aK \notin P$.

Beispiel $(1 : 2 : 3) = (2 : 4 : 6)$.

Satz 3.9 Sei $(P, \mathfrak{G}) = \mathrm{PG}(2, K)$ und $F \in \mathfrak{G}$. Dann ist die affine Ebene $(P_F, \mathfrak{G}_F)$ (siehe (3.3)) isomorph zu $\mathrm{AG}(2, K)$.

Beweis: Wähle eine Basis vom K^3, $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2} \in F$, $\mathbf{b_3} \in K^3 \setminus F$. Bezüglich dieser Basis liegt die Situation aus (3.8) vor. Es bleibt zu zeigen, daß Koordinatentransformationen die Geometrie nicht ändern, genauer: $K^3 \to K^3$; $\mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$ induziert einen Automorphismus von $\mathrm{PG}(2, K)\ \forall M \in GL(3, K)$. Das werden wir in Kapitel 6 sehen. $\square$

Bemerkung Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim V = 3$. Dann erhält man eine projektive Ebene durch $P := \{aK \mid a \in V^*\}$, $\mathfrak{G} := \{aK + bK \mid a, b \in V \text{ linear unabhängig}\}$, $I := \subseteq$. Natürlich ist $(P, \mathfrak{G})$ isomorph zu $\mathrm{PG}(2, K)$. Durch Wahl einer Basis werden homogene Koordinaten festgelegt.

3.3 Zur Existenz endlicher affiner bzw. projektiver Ebenen

Nach (2.2.3) gibt es zu jedem Körper eine affine Ebene $\mathrm{AG}(2, K)$ und nach (3.8) eine zugehörige projektive Ebene $\mathrm{PG}(2, K)$, beide mit Ordnung $|K|$. Für jede Primzahl p ist $\mathrm{GF}(p) := (\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ ein Körper. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ läßt sich $\mathbb{Z}_p$ zu einem Körper $\mathrm{GF}(p^n)$ mit p^n Elementen erweitern. Dieser ist sogar bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt (Beweis in der Algebra).

Beispiel (Skizze): Das Polynom $x^2 + x + 1$ hat keine Nullstelle in $K = \mathbb{Z}_2$. Bezeichne τ eine Nullstelle von $x^2 + x + 1$ (also $\tau^2 = \tau + 1$) $\Rightarrow \mathrm{GF}(4) := \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2\tau$ ist ein Körper mit den

Insgesamt folgt damit $\overline{a_1, a_3} \| \overline{r, z} \| \overline{b_1, b_3}$. $\square$

Bemerkung (1) Tatsächlich gilt: (AD), (AD') und der Scherensatz sind äquivalent.

(2) Die projektiven Fassungen von (AD) und (AD') sind zueinander dual.

(3) Es gilt die Implikationskette (AP) $\Rightarrow$ (AD) $\Rightarrow$ (Ad) $\overset{\text{Übung}}{\Longrightarrow}$ (Ap) (Spezialfall von (AP) mit $G_1 \| G_2$). Ob (Ap) $\Rightarrow$ (Ad) gilt, ist offen. Die übrigen Implikationen sind nicht umkehrbar (durch Gegenbeispiele belegt).

(4) Die Moulton-Ebene erfüllt nicht (Ap), also keines der Axiome aus (3).

Satz 4.4 Die affine Koordinatenebene $(A, \mathfrak{G}) = \mathrm{AG}(2, K)$ über dem Körper K ist pappussch genau dann, wenn K kommutativ ist.

Beweis: Wegen (4.1) gilt (AD), also auch (Ap). Wir können uns daher auf (AP) mit sich schneidenden Geraden G_1, G_2 beschränken. Seien $z = G_1 \cap G_2$ und a_i wie in (AP) gegeben. Zu zeigen ist $\overline{a_1, a_6} \| \overline{a_3, a_4} \Leftrightarrow K$ kommutativ. Wir benutzen das Lemma aus dem Beweis von (4.1). $\exists \lambda, \mu, \nu, \rho \in K$ mit $a_4 = z + (a_2 - z)\lambda, a_5 = z + (a_1 - z)\mu$, und $\overline{a_1, a_2} \| \overline{a_4, a_5} \Rightarrow \lambda = \mu$. Genauso $a_3 = z + (a_5 - z)\nu, a_2 = z + (a_6 - z)\rho$, und $\overline{a_2, a_3} \| \overline{a_5, a_6} \Rightarrow \nu = \rho$. Nun gilt:

$$a_3 = z + (a_5 - z)\nu = z + (z + (a_1 - z)\lambda - z)\nu = z + (a_1 - z)\lambda\nu$$

$$a_4 = z + (a_2 - z)\lambda = z + (z + (a_6 - z)\nu - z)\lambda = z + (a_6 - z)\nu\lambda$$

d.h. $\overline{a_1, a_6} \| \overline{a_3, a_4} \Leftrightarrow \lambda\nu = \nu\lambda$. Da $\lambda, \nu \in K$ beliebig gewählt waren, folgt die Behauptung. $\square$

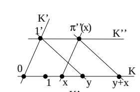
5 Koordinatisierung desarguesscher affiner Ebenen

Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine desarguessche affine Ebene. Das Ziel ist, einen Körper K so zu konstruieren, daß $(A, \mathfrak{G}) \cong \mathrm{AG}(2, K)$ gilt (Umkehrung von (4.1)).

Seien $0, 1, 1' \in A$ drei nicht kollineare Punkte und $K = \overline{0, 1}$, $K' = \overline{0, 1'}$, $K'' = \{1' \| K\}$ drei Geraden. Wir betrachten folgende Parallelperspektivitäten:

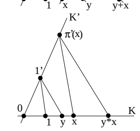
$$\pi' : K \to K';\ x \mapsto \{x \| \overline{1, 1'}\} \cap K' \quad \text{und} \quad \pi'' : K \to K'';\ x \mapsto \{x \| K'\} \cap K''.$$

Für $y \in K$ sei



$$\alpha_y : K \to K;\ x \mapsto \{\pi''(x) \| \overline{1', y}\} \cap K$$

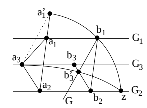
und



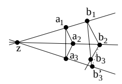
$$\mu_y : K \to K;\ x \mapsto \{\pi'(x) \| \overline{1', y}\} \cap K.$$

Wir setzen $y + x := \alpha_y(x)$ und $y \cdot x := \mu_y(x)$.

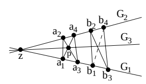
$\overline{a_1',a_2}\|\overline{b_1,b_2}$, $\overline{a_2,a_3}\|\overline{b_2,b_3'}$, also folgt mit (AD): $\overline{a_1',a_3}\|\overline{b_1,b_3'}\|\overline{a_1,a_3} \Rightarrow \overline{a_1',a_3} = \overline{a_1,a_3} \Rightarrow a_1' = a_1$ (denn $a_1 = \overline{a_1,a_2} \cap \overline{a_1,a_3} = \overline{a_1,a_2} \cap \overline{a_1',a_3} = a_1'$) $\Rightarrow z \in \overline{a_1,b_1} = G_1$. Wegen $z \in G_2$ widerspricht das der Annahme $G_1 \parallel G_2$ und $G_1 \neq G_2$.



(2) Falls für ein Paar i,j mit $i \neq j$ gilt $\overline{a_i,b_i} = \overline{a_j,b_j}$, so ist nichts zu zeigen. Im anderen Fall seien für $i \in \{1,2,3\}$ wenigstens zwei $\overline{a_i,b_i}$ nicht parallel (sonst ist ebenfalls nichts zu zeigen), also o.B.d.A. $z = \overline{a_1,b_1} \cap \overline{a_2,b_2}$. Es gilt $z \neq a_3,b_3$ (denn sonst $\overline{a_1,a_3} = \overline{b_1,b_3} \Rightarrow$ Wid). Sei $b_3' = \overline{z,a_3} \cap \overline{b_1,b_3}$ (existiert, da ansonsten $z \in \overline{a_1,a_3} \Rightarrow \overline{b_1,b_3} = \overline{a_1,a_3} \Rightarrow$ Wid.). Die Punkte a_2,a_1,a_3,b_2,b_1,b_3' erfüllen die Voraussetzungen von (AD), also gilt $\overline{b_2,b_3'}\|\overline{a_2,a_3}\|\overline{b_2,b_3} \Rightarrow \overline{b_2,b_3'} = \overline{b_2,b_3}$ und $b_3' = \overline{b_1,b_3} \cap \overline{b_2,b_3} = b_3$, insbesondere gilt $z \in \overline{a_3,b_3}$.

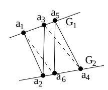


(3) Im Fall $\overline{a_2,a_3}\|\overline{a_1,a_4} \wedge \overline{b_2,b_3}\|\overline{b_1,b_4}$ folgt $\overline{a_1,a_4}\|\overline{b_1,b_4}$ direkt, also kann o.B.d.A. $\overline{a_2,a_3} \nparallel \overline{a_1,a_4}$ angenommen werden. Sei also $p = \overline{a_2,a_3} \cap \overline{a_1,a_4}$. Wähle G_3 durch p, so daß (AD) oder (Ad) entsteht. In den Übungen wird der Beweis weitergeführt. □



Definition Die affine Ebene $(A,\mathfrak{G})$ heißt *pappussch*, wenn das folgende *Axiom von Pappos*[4] erfüllt ist:

(AP) Seien G_1,G_2 verschiedene Geraden und $a_1 \ldots a_6$ verschieden mit $a_1,a_3,a_5 \in G_1 \setminus G_2$ und $a_2,a_4,a_6 \in G_2 \setminus G_1$. Dann $\overline{a_1,a_2}\|\overline{a_4,a_5} \wedge \overline{a_2,a_3}\|\overline{a_5,a_6} \Rightarrow \overline{a_1,a_6}\|\overline{a_3,a_4}$.



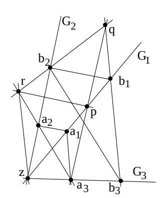
Satz 4.3 (Hessenberg[5] 1905) Jede pappussche affine Ebene $(A,\mathfrak{G})$ ist desarguessch.

Beweis: Seien $G_1,G_2,G_3 \in \mathfrak{G}$ verschieden und kopunktal mit $z = G_1 \cap G_2 \cap G_3$. Seien $a_i,b_i \in G_i$ wie in (AD) gegeben. Zu zeigen ist $\overline{a_1,a_3}\|\overline{b_1,b_3}$. O.B.d.A. seien a_1,a_2,a_3 nicht kollinear, sonst wären nämlich b_1,b_2,b_3 ebenfalls kollinear und nichts wäre zu zeigen. Sind beide $\overline{a_1,a_3},\overline{b_1,b_3}\|G_2$, so folgt die Behauptung, also sei o.B.d.A. $\overline{b_1,b_3} \nparallel G_2$. Dann existieren die Punkte

$$p = \{a_3\|G_2\} \cap G_1 \qquad q = \{a_3\|G_2\} \cap \overline{b_1,b_3} \notin \overline{b_2,b_3} \qquad r = \overline{q,b_2} \cap \overline{a_2,a_3}$$

(denn $\overline{a_2,a_3}\|\overline{b_2,b_3} \nparallel \overline{q,b_2}$). Dabei gilt $p,q \neq a_3$ (sonst $G_1 = G_3$), $r \neq a_3$ (sonst $q = a_3$) und $r \neq p$ (sonst $p = r = a_3$). Jetzt wird dreimal (AP) angewandt:

Erstens für r,a_3,q,b_3,b_2,z auf den Geraden $\overline{r,q}$ und G_3:
$\overline{r,a_3}\|\overline{b_2,b_3}, \overline{z,b_2}\|\overline{a_3,q} \Rightarrow \overline{r,z}\|\overline{q,b_3} = \overline{b_1,b_3}$.
Zweitens für r,z,b_2,b_1,q,p auf den Geraden $\overline{r,b_2}$ und G_1:
$\overline{r,z}\|\overline{b_1,q}, \overline{z,b_2}\|\overline{p,q} \Rightarrow \overline{r,p}\|\overline{b_1,b_2}\|\overline{a_1,a_2}$.
Drittens für r,p,a_3,a_1,a_2,z auf $\overline{a_2,a_3}$ und G_1:
$\overline{r,p}\|\overline{a_1,a_2}, \overline{p,a_3}\|\overline{a_2,z} \Rightarrow \overline{r,z}\|\overline{a_1,a_3}$.



[4]Pappos/Pappus von Alexandria (um 320 n. Chr.)
[5]G. Hessenberg 1874–1929

4 Elementen $0,1,\tau,\tau+1$ und folgender Addition, bzw. Multiplikation

$$(a+b\tau)+(c+d\tau) := (a+c)+(b+d)\tau$$

$$(a+b\tau)(c+d\tau) := (ac+bd)+(ad+bc+bd)\tau.$$

Für die Inversen gilt

$$\tau^{-1} = \tau+1 \quad \text{und} \quad (\tau+1)^{-1} = \tau.$$

Für $K = \mathbb{R}$ erzeugt das Polynom x^2+1 auf diese Weise den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen (mit imaginärer Nullstelle i).

Bemerkung (1) Die Multiplikation ergibt sich durch distributives Ausmultiplizieren der Summen, und Anwenden der Tatsache, daß τ Nullstelle des gegebenen Polynoms ist.

(2) Um endliche Körper mit p^2 bzw. p^3 Elementen zu konstruieren, kann man entsprechend vorgehen: finde Polynom vom Grad 2 bzw. 3 ohne Nullstellen in $\mathbb{Z}_p$ usw. Für $p^n, n \geq 4$ muß das Polynom „irreduzibel" sein.

(3) Ist $K = \mathrm{GF}(q)$ für eine Primzahlpotenz $q = p^n$, so schreiben wir statt $\mathrm{AG}(2,K) = \mathrm{AG}(2,\mathrm{GF}(q))$ auch kürzer $\mathrm{AG}(2,q)$. Entsprechend schreiben wir $\mathrm{PG}(2,q)$ statt $\mathrm{PG}(2,\mathrm{GF}(q))$.

Folgerung 3.10 Für jede Primzahl p und alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es affine und projektive Ebenen der Ordnung p^n, etwa $\mathrm{AG}(2,p^n)$ bzw. $\mathrm{PG}(2,p^n)$.

Satz 3.11 (*Nichtexistenzsatz von Bruck-Ryser*) Gibt es für $q \in \mathbb{N}$ mit $q \equiv 1 \pmod 4$ oder $q \equiv 2 \pmod 4$ eine projektive Ebene $(P,\mathfrak{G})$ mit ord $P = q$, so ist q die Summe zweier Quadrate, d.h. $\exists a,b \in \mathbb{N}_0$ mit $q = a^2+b^2$.

Beweis: etwa in [HP73] nachzulesen.

Satz 3.12 Es gibt keine projektive Ebene der Ordnung $q \equiv 6 \pmod 8$.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{N}$ geschrieben als $a = 4m+r$ mit $r \in \{0,1,2,3\}$. Dann ist

$$a^2 = 16m^2+8mr+r^2 = 8m'+s \text{ mit } m' \in \mathbb{N} \text{ und } s \in \{0,1,4\}.$$

Falls $a,b \in \mathbb{N}$ gilt, so ist $a^2+b^2 = 8m''+t$ mit $m'' \in \mathbb{N}$ und $t \in \{0,1,2,4,5\}$. Für $q \equiv 6 \pmod 8$ gilt daher $q \neq a^2+b^2\ \forall a,b \in \mathbb{N}_0$. Es gilt aber auch $q \equiv 2 \pmod 4$ und mit (3.11) folgt dann, daß es keine projektive Ebene der Ordnung q gibt. □

Satz 3.13 Jede Primzahl $p \equiv 1 \pmod 4$ ist die Summe zweier Quadrate.

Beweis: folgt aus (3.10) und (3.11).

Bemerkung (1) Fermat[1]: Sei $p \neq 2$ eine Primzahl. Dann gilt: p ist Summe zweier Quadrate (sogar eindeutig) $\Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod 4$. Insbesondere sind Primzahlen $p \equiv 3 \pmod 4$ nicht Summe zweier Quadrate.

[1]Pierre de Fermat 1601–1665

(2) Der Satz von Bruck-Ryser benötigt den sog. Vierquadratesatz von Lagrange[2], der besagt, daß jede natürliche Zahl Summe vierer Quadratzahlen ist.

(3) Alle bekannten projektiven Ebenen haben als Ordnung eine Primzahlpotenz.

(4) Neben dem Satz von Bruck-Ryser gibt es ein einziges Nichtexistenzergebnis: mit einem Computerbeweis wurde gezeigt, daß es keine projektive Ebene der Ordnung 10 gibt.

(5) Für Primzahlpotenzen q gibt es auch Beispiele von projektiven Ebenen, die nicht die Form $\mathrm{PG}(2,q)$ haben und zum Beispiel mit Fastkörpern dargestellt werden. Der kleinste echte Fastkörper hat 9 Elemente.

Für einige Ordnungen ist die Existenzfrage einer projektiven Ebene also geklärt:

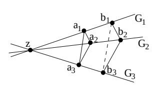
Ordnung	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Existenz	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓	?	✓	✗	?
Beweis	p^n	p^n	p^n	p^n	3.11	p^n	p^n	p^n	Computer	p^n	-	p^n	3.11	-

4 Schließungssätze

Definition Die affine Ebene $(A,\mathfrak{G})$ heißt *desarguessch*, wenn das folgende *Axiom von Desargues*[3] erfüllt ist:

(AD) Für $i \in \{1,2,3\}$ seien $G_i \in \mathfrak{G}$ verschieden aber kopunktal mit $z \in G_i$. Für verschiedene $a_i, b_i \in G_i \setminus \{z\}$ gelte dann:

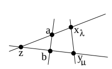
$$\overline{a_1,a_2} \parallel \overline{b_1,b_2} \wedge \overline{a_2,a_3} \parallel \overline{b_2,b_3} \Rightarrow \overline{a_1,a_3} \parallel \overline{b_1,b_3}.$$



Satz 4.1 Die affine Koordinatenebene $(A,\mathfrak{G}) = \mathrm{AG}(2,K)$ über einem Körper K ist desarguessch.

Wir zeigen zunächst folgendes

Lemma Seien $a,b,z \in A$ nicht kollinear und für $\lambda,\mu \in K^*$ seien $x_\lambda = z+(a-z)\lambda$, $y_\mu = z+(b-z)\mu$. Dann gilt: $\overline{a,b} \parallel \overline{x_\lambda, y_\mu} \Leftrightarrow \lambda = \mu$.



Beweis: $\overline{a,b} \parallel \overline{x_\lambda,y_\mu} \Leftrightarrow (b-a)K = (y_\mu - x_\lambda)K \Leftrightarrow \exists \delta \in K^* : y_\mu - x_\lambda = (b-a)\delta$.

„$\Leftarrow$“: Sei $\lambda = \mu$, dann gilt $y_\mu - x_\lambda = (b-a)\lambda$, also $\delta = \lambda$.

„$\Rightarrow$“: Ist $\lambda \neq \mu \Rightarrow y_\mu \neq y_\lambda$ (mit $y_\lambda = z+(b-z)\lambda$), da aber $\overline{x_\lambda,y_\lambda} = \{x_\lambda \parallel \overline{a,b}\} \neq \overline{x_\lambda,y_\mu}$ (wegen z, x_λ, y_μ nicht kollinear) gilt, folgt $\overline{a,b} \nparallel \overline{x_\lambda,y_\mu}$. □

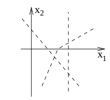
[2] Joseph Louis Lagrange 1736–1813
[3] Girard Desargues 1591-1661

Beweis von Satz 4.1 In der Situation (AD) gilt $b_i = z + (a_i - z)\lambda_i$ mit $\lambda_i \in K^*$. Wegen des Lemmas hat man $\overline{a_1,a_2} \parallel \overline{b_1,b_2} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ und $\overline{a_2,a_3} \parallel \overline{b_2,b_3} \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3$. Es folgt natürlich $\lambda_1 = \lambda_3$ und weiter (mit dem Lemma) $\overline{a_1,a_3} \parallel \overline{b_1,b_3}$. □

Beispiel Die *Moulton-Ebene* (vgl. Übungsaufgabe 3) hat die Punktmenge $M = \mathbb{R}^2$ und die folgende Geradenmenge $\mathfrak{G}$: zu $m,c \in \mathbb{R}$ sei $\langle\!\langle c \rangle\!\rangle = \langle c \rangle = \{(x_1,x_2) \in M \mid x_1 = c\}$ und

$$\langle\!\langle m,c \rangle\!\rangle = \begin{cases} \langle m,c \rangle = \{(x_1,x_2) \in M \mid x_2 = mx_1 + c\} & \text{für } m \leq 0 \\ \{(x_1,x_2) \in M \mid (0 \geq x_2 = mx_1 + c) \vee (0 < x_2 = \frac{1}{2}(mx_1 + c))\} & \text{für } m > 0 \end{cases}$$

Weiter sei $\mathfrak{G} = \{\langle\!\langle m,c \rangle\!\rangle \mid m,c \in \mathbb{R}\} \cup \{\langle\!\langle c \rangle\!\rangle \mid c \in \mathbb{R}\}$. Dann ist $(M,\mathfrak{G})$ eine nicht desargessche affine Ebene.

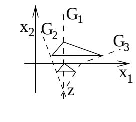


Beweisskizze: $(M,\mathfrak{G})$ ist affine Ebene: (I1): Betrachte die Punkte $a \neq b \in M$ (o.B.d.A. mit $a_1 \leq b_1$). Nur der Fall $(a_1 < b_1) \wedge (a_2 \leq 0 < b_2)$ weicht vom Üblichen ab. Gesucht ist $G = \langle\!\langle m,c \rangle\!\rangle$, so daß $a,b \in G$. Also $\left.\begin{array}{r} a_2 = ma_1 + c \\ 2b_2 = mb_1 + c \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = \frac{2b_2 - a_2}{b_1 - a_1} > 0 \\ c = a_2 - ma_1 \end{array}\right.$ und G ist somit eindeutig bestimmt.

(I2) und (E3) sind klar.

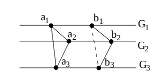
(P): Man kann zeigen: $\langle\!\langle m,c \rangle\!\rangle \cap \langle\!\langle m',c' \rangle\!\rangle = \emptyset \Leftrightarrow m = m'$.

Offensichtlich ist in der nebenstehenden Figur (AD) nicht erfüllt.
□



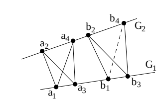
Satz 4.2 Sei $(A,\mathfrak{G})$ eine desargessche affine Ebene. Dann gilt:

(1) (Ad) („*kleiner Desargues*“) Für $i \in \{1,2,3\}$ seien $G_i \in \mathfrak{G}$ parallel und verschieden. Weiter gelte $a_i, b_i \in G_i$. Dann $\overline{a_1,a_2}\|\overline{b_1,b_2} \wedge \overline{a_2,a_3}\|\overline{b_2,b_3} \Rightarrow \overline{a_1,a_3}\|\overline{b_1,b_3}$.



(2) (AD') („*Umkehrung des Desargues*“) Seien $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 \in A$ verschieden, so daß weder a_1,a_2,a_3 noch b_1,b_2,b_3 kollinear sind und für $i,j \in \{1,2,3\}, i \neq j$, gelte $\overline{a_i,a_j}\|\overline{b_i,b_j}$. Dann ist $\{\overline{a_i,b_i} \mid i \in \{1,2,3\}\}$ eine Menge von parallelen oder kopunktalen Geraden.

(3) (*Scherensatz*) Seien $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$ und $a_1,a_3,b_1,b_3 \in G_1 \setminus G_2$ und $a_2,a_4,b_2,b_4 \in G_2 \setminus G_1$. Dann gilt: $\overline{a_i,a_{i+1}}\|\overline{b_i,b_{i+1}}$ $\forall i \in \{1,2,3\} \Rightarrow \overline{a_1,a_4}\|\overline{b_1,b_4}$.



Beweis: (1) Die Voraussetzung implizieren: $\exists i \in \{1,2,3\} : a_i = b_i \Rightarrow \forall i \in \{1,2,3\} : a_i = b_i$. Daher können wir $a_i \neq b_i$ $\forall i \in \{1,2,3\}$ annehmen. O.B.d.A. seien weder a_1,a_2,a_3 noch b_1,b_2,b_3 kollinear (ansonsten ist die Aussage trivial).

Sei nun $G = \{b_1 \| \overline{a_1,a_3}\}$, dann existiert $b_3' := G \cap \overline{b_2,b_3}$ (weil $\overline{a_1,a_3} \nparallel \overline{b_2,b_3}$). Angenommen $b_3 \neq b_3'$, dann existiert $z := \overline{a_3,b_3'} \cap G_2$ und $a_1' := \overline{a_1,a_2} \cap \overline{z,b_1}$ (weil $\overline{a_1,a_2}\|\overline{b_1,b_2}$). Es gilt