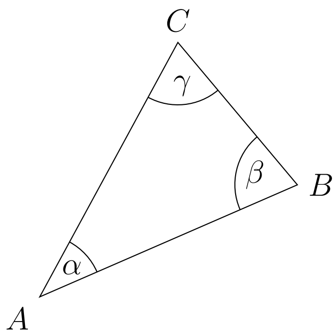
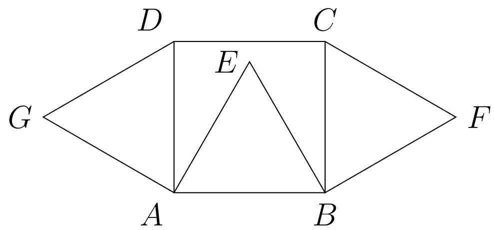
Klassenstufen 7, 8

Aufgabe 1 (4+10+6 Punkte). (a) In einem gleichschenkligen Dreieck sei der Winkel zwischen den gleichen Schenkeln α. Findet je eine von α abhängige Formel für die Basiswinkel β und γ (mit Begründung).



(b) Auf drei Seiten eines Quadrats $ABCD$ werden gleichseitige Dreiecke ΔABE, ΔCBF und ΔADG gezeichnet, so dass E im Innern des Quadrats liegt und F und G außen:



1. Beweist, dass D, E und F auf einer Geraden liegen.
2. Beweist, dass G, E und F nicht auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 2 (1+3+2+5+5+4 Punkte)**.** Die *Quersumme* einer positiven ganzen Zahl ist die Summe ihrer Ziffern in der Dezimaldarstellung.

(a) Beschreibt die größte Zahl, deren Quersumme 47 beträgt und in deren Dezimaldarstellung keine Null vorkommt.

(b) Findet die kleinste Zahl mit Quersumme 47 und begründet, dass es keine kleinere gibt.

(c) Zeigt, dass die Differenz von einer Zahl und ihrer Quersumme immer ein Vielfaches von 9 ist.

Hinweis: Benutzt, dass 9, 99, 999, … durch 9 teilbar sind.

(d)
1. Findet jeweils eine Zahl, die genau 1-mal so groß ist wie ihre Quersumme, die 2-mal so groß ist wie ihre Quersumme, …, die 10-mal so groß ist wie ihre Quersumme.
2. Für welche Zahlen n von 1 bis 10 gibt es nur eine Zahl kleiner 100, die genau n-mal so groß wie ihre Quersumme ist, für welche n gibt es mehrere? Begründet.

(e) Gibt es eine Zahl, die genau 101-mal so groß wie ihre Quersumme ist?

Aufgabe 3 (3+5+4+8 Punkte)**.** Bei einem Mathematikwettbewerb sollen Schülerteams Aufgaben lösen. Ein Team bestehend aus Anna, Ben, Clara, David und Emily versucht die Aufgaben 1 bis 5 so aufzuteilen, dass jeder Person eine Aufgabe zugeordnet wird und dass jede Aufgabe auch von genau einer Person bearbeitet wird.

(a) Zeigt, dass die Aufgaben so aufgeteilt werden können, wenn Anna nur die Aufgaben 2 und 3, Ben nur die Aufgaben 1 und 5, Clara nur die Aufgaben 1 und 4, David nur die Aufgabe 2 und 3 und Emily nur die Aufgaben 4 und 5 erledigen kann.

(b) Zeigt, dass die Aufgaben nicht so aufgeteilt werden können, wenn Anna nur die Aufgaben 3 und 5, Ben nur die Aufgaben 1, 2, 4 und 5, Clara nur die Aufgaben 3 und 5, David nur die Aufgaben 3 und 5 und Emily nur die Aufgaben 1, 2, 3 und 4 erledigen kann.

(c) Angenommen bei einem anderen Wettbewerb (mit größeren Teams und mehr Aufgaben) tritt die Situation ein, dass jedes Teammitglied genau zwei Aufgaben erledigen kann und dass jede Aufgabe von genau zwei Personen gelöst werden kann.

   1. Zeigt, dass es unter dieser Voraussetzung genau so viele Aufgaben geben muss wie Teammitglieder.
   2. Zeigt, dass unter dieser Voraussetzung die Aufgaben so aufgeteilt werden können wie oben.

Aufgabe 4 (8+1+6+5 Punkte)**.** Eimer A enthalte 3 Liter Sirup, Eimer B enthalte n Liter Wasser und Eimer C sei leer. Daraus wird ein Erfrischungsgetränk gemischt. Hierbei ist Folgendes erlaubt:

- Leere einen Eimer (vollständig) aus.
- Schütte den Inhalt eines Eimers vollständig in einen anderen.
- Fülle aus einem Eimer einen zweiten Eimer soweit auf, bis im zweiten Eimer genau so viel Inhalt ist wie im dritten Eimer.

Es sollen 10 Liter 30-prozentiges Sirupwasser entstehen, also 7 Liter Wasser gemischt mit 3 Litern Sirup.

(a) Wie kann man dies erreichen, wenn $n = 20$ ist?

(b) Zeigt, dass man dies nicht erreichen kann, wenn $n = 5$ ist.

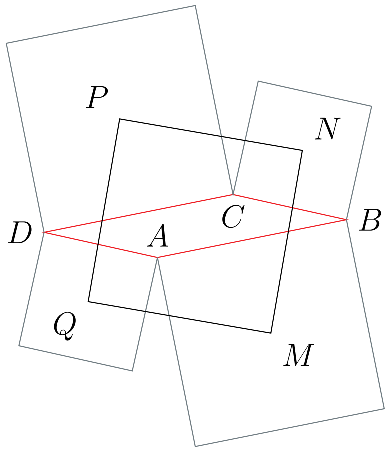
(c) Zeigt, dass man dies nicht erreichen kann, wenn $n = 9$ ist.

(d) Für welche natürlichen Zahlen n kann man dies erreichen, für welche nicht (jeweils mit Beweis)?

Klassenstufen 9, 10

Aufgabe 1 (4+6+2+4+4 Punkte)**.** Sei $ABCD$ ein Parallelogramm.

(a) Über den vier Seiten des Parallelogramms $ABCD$ wird je ein Quadrat errichtet. Die vier Mittelpunkte der Quadrate seien mit M, N, P und Q bezeichnet – mit Lage wie in der Zeichnung.



1. Zeigt, dass das $MNPQ$ ein Parallelogramm ist.
2. Zeigt, dass das Viereck $MNPQ$ ein Quadrat ist.
   Hinweis: Zeigt, dass das Dreieck zwischen zwei Quadraten kongruent zum halben Parallelogramm ist.

(b) Jetzt werden über den vier Seiten des Parallelogramms $ABCD$ jeweils nach außen die gleichseitigen Dreiecke ΔADF, ΔBAG, ΔCBH und ΔDCJ errichtet.

1. Zeigt, dass das Viereck $FGHJ$ stets ein Parallelogramm ist.
2. Was lässt sich über das Parallelogramm $FGHJ$ aussagen, wenn $ABCD$ eine Raute (ein Rhombus) ist?
3. Was muss für das Parallelogramm $ABCD$ gelten, wenn $FGHJ$ eine Raute ist?

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Findet weitere Beziehungen zwischen den Anforderungen an $ABCD$ und $FGHJ$.

Aufgabe 2 (5+5+5+5 Punkte). (a) Gebt ein Beispiel dafür an, dass $2^n - 2^m$ mit $n > m > 1$ durch 10 teilbar ist, und eines, so dass es nicht durch 10 teilbar ist.

(b) Für welche $n > m > 1$ ist $2^n - 2^m$ durch 10 teilbar und für welche nicht? (Begründet.)

(c) Zeigt, dass $2^{2^n} - 2^{2^m}$ mit $n > m > 1$ stets durch 10 teilbar ist.

Schreibweise: $2^{2^n} = 2^{(2^n)}$

(d) Für welche $n > m > 1$ ist $3^{3^n} - 3^{3^m}$ durch 10 teilbar und für welche nicht? (Begründet.)

Aufgabe 3 (6+6+3+5 Punkte)**.** Beim Wägen mit einer einfachen Balkenwaage werden Gegenstände auf die beiden Schalen der Waage gelegt. Eins von drei Ergebnissen kann man ablesen: Die Waage ist im Gleichgewicht, falls beide Seiten gleich schwer sind. Anderenfalls hängt die schwere Seite unten und die leichte oben, der Gewichtsunterschied ist aber nicht erkennbar.

In den folgenden Problemen gibt es Kugeln mit genau zwei verschiedenen Gewichten, leichte und schwere. Die Kugeln haben verschiedene Farben, wobei von jeder Farbe genau eine Kugel leicht ist und alle anderen dieser Farbe schwer sind. Die leichten Kugeln sollen mit einer Balkenwaage gefunden werden.

(a) Zeigt, dass man im Fall von zwei blauen, zwei roten und zwei gelben Kugeln die leichten Kugeln immer durch zwei Wägungen ermitteln kann.

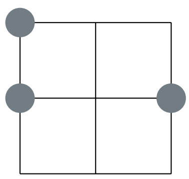
(b) Zeigt, dass bei vier roten und vier blauen Kugeln immer drei Wägungen reichen.

(c) Zeigt, dass bei sechs roten und sechs blauen Kugeln drei Wägungen nicht immer reichen.

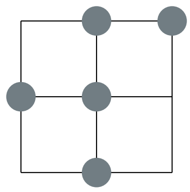
Hinweis: Betrachtet die Anzahl der Möglichkeiten der Gewichtsverteilung der Kugeln und die Anzahl der möglichen Ergebnisse beim Wägen.

(d) Zeigt, dass bei fünf roten und fünf blauen Kugeln immer drei Wägungen reichen.

Aufgabe 4 (4+3+3+2+2+6 Punkte)**.** Man betrachte in einem Quadrat Gitterpunkte mit natürlichen Koordinaten, also alle Punkte (x, y), bei denen x und y natürliche Zahlen kleiner oder gleich einer festen natürlichen Zahl n sind. Die Menge dieser Punkte wird hier mit $[n] \times [n]$ bzw. $[n]^2$ bezeichnet. Drei Punkte bilden ein L, wenn zu einem (x, y) ein zweiter $(x + a, y)$ rechts davon und ein dritter $(x, y + b)$ oberhalb des ersten liegt (mit $a, b \in \mathbb{N}$). Zum Beispiel bilden $(2, 3)$, $(7, 3)$ und $(2, 11)$ ein L in der Menge $[11]^2$. Enthält eine Teilmenge in $[n]^2$ kein L, so nennen wir sie L-frei.



L in $[3]^2$



L-freie Menge in $[3]^2$

(a) Zeigt, dass jede Teilmenge von $[3]^2$ mit mindestens sechs Punkten ein L enthält.

(b) Findet eine L-freie Teilmenge von $[4]^2$ mit sieben Punkten.

(c) Gibt es noch weitere L-freie Teilmengen von $[4]^2$ mit sieben Punkten?

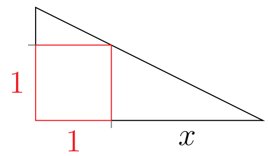
(d) Gibt es einen Punkt, der in jeder größten L-freien Teilmenge von $[n]^2$ enthalten ist?

(e) Gibt es mehr als einen solchen Punkt wie im vorherigen Aufgabenteil?

(f) Findet eine Formel (mit Beweis) für die Anzahl der Elemente der größten L-freien Teilmenge von $[n]^2$.

Oberstufe (11, 12, 13)

Aufgabe 1 (6+8+4+2 Punkte)**.** Ein rechtwinkliges Dreieck heiße *normal*, falls in den rechten Winkel ein Quadrat mit Seitenlänge 1 so einzeichnet werden kann, dass die Katheten zwei Seiten des Quadrats enthalten und die Hypotenuse die gegenüberliegende Ecke des Quadrats enthält.



(a) Wenn eine Kathete 3 lang ist, wie groß ist dann der Flächeninhalt des normalen Dreiecks?

(b) Welche Werte sind für den Flächeninhalt normaler Dreiecke möglich?

(c)
1. Welchen Flächeninhalt hat ein normales Dreieck, bei dem die Hypotenuse Länge 3 hat?
2. Welche Längen haben die Katheten eines normalen Dreiecks, bei dem die Hypotenuse Länge 3 hat?

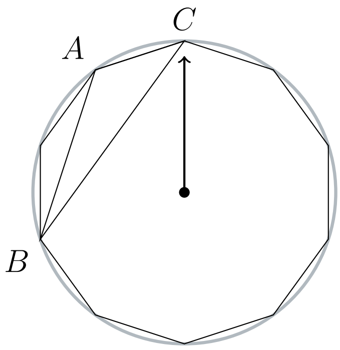
Aufgabe 2 (8+12 Punkte)**.** Es werden Parabeln der Form $y = x^2 + a_i x + b_i$ mit reellen Zahlen a_i und b_i betrachtet.

(a) Stellt Bedingungen an a_1, a_2, b_1 und b_2 auf, so dass zwei solche Parabeln keinen, einen, zwei bzw. mehr Schnittpunkte haben (mit Begründung).

(b) Es sind nun vier solche Parabeln ins Koordinatensystem eingezeichnet, die insgesamt vier Schnittpunkte haben, wobei sich in keinem Schnittpunkt mehr als zwei Parabeln schneiden. Die vier Schnittpunkte seien (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) und (x_4, y_4) mit $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

Zeigt, dass dann immer $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$ gilt.

Aufgabe 3 (4+6+6+4 Punkte)**.** Der Zeiger eines Glücksrads springt beim Drehen jeweils in die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks. Das Rad wird dreimal gedreht und dadurch werden zufällig drei (nicht notwendigerweise verschiedene) Punkte A, B und C der Ecken des n-Ecks ausgewählt.



(a) Ist $n = 9$, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ΔABC rechtwinklig ist? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für beliebiges ungerades n?

(b) Ist $n = 10$, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ΔABC rechtwinklig ist? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für beliebiges gerades n?

(c) Ist n ungerade, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Dreieck ΔABC stumpfwinklig ist, ein Winkel also größer als $90°$ ist?

(d) Ist n ungerade, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Dreieck ΔABC spitzwinklig ist, alle Winkel also kleiner als $90°$ sind?

Hinweis: Entartete Dreiecke, also solche, bei denen Ecken zusammenfallen, werden weder als rechtwinklige noch als spitzwinklige Dreiecke gezählt.

Aufgabe 4 (5+5+10 Punkte)**.** Eine positive ganze Zahl $a > 1$ wird (in ihrer Dezimaldarstellung und ohne führende Nullen) zweimal hintereinander geschrieben, so dass sich die Zahl x ergibt.

(a) Ist a eine n-stellige Zahl, durch welche $n+1$-stellige Zahl ist dann x in jedem Fall teilbar?

(b) Findet ein n, so dass x (in jedem Fall) einen einstelligen Teiler hat, der aber größer als 1 ist.

(c) Nun wird der Fall betrachtet, dass x ein ganzzahliges Vielfaches von a^2 ist. Berechne alle möglichen Verhältnisse $\frac{x}{a^2}$.

Lösungen 7, 8

Lösung 1. (a) Bei einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß (Spiegelsymmetrie), also ist $\beta = \gamma$. Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°, also ist

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + 2 \cdot \beta = 180^\circ\,.$$

Durch Auflösen nach β erhält man die gewünschte Formel

$$\beta = \gamma = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \alpha\,.$$

(b) 1. Damit D, E und F auf einer Geraden liegen, muss $\angle DEF = 180^\circ$ gelten. Dieser Winkel setzt sich zusammen aus $\angle DEA$, $\angle AEB$ und $\angle BEF$, die nun berechnet werden: Das Dreieck ΔAEB ist gleichseitig, also ist $\angle AEB = 60^\circ$ und außerdem $\angle EAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ als Differenz vom Winkel im Quadrat und gleichseitigen Dreieck.

Des Weiteren sind alle Seitenlängen des Quadrats und der gleichseitigen Dreiecke über dessen Seiten gleich lang, also insbesondere auch $|AE| = |AD|$, so dass ΔEAD gleichschenklig ist und damit nach dem vorherigen Aufgabenteil $\angle DEA = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \angle EAD = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 75^\circ$.

Das Dreieck ΔBEF ist ebenfalls gleichschenklig und $\angle FBE = \angle FBC + \angle CBE = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, so dass man $\angle BEF = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \angle FBE = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$ wieder mit dem vorherigen Aufgabenteil erhält. Insgesamt ergibt sich also

$$\angle DEF = \angle BEF + \angle AEB + \angle DEA = 45^\circ + 60^\circ + 75^\circ = 180^\circ,$$

so dass D, E und F auf einer Geraden liegen.

2. Da die Figur symmetrisch zu einer Senkrechten auf AB durch E ist, ist $\angle GEA = \angle BEF$, also erhält man mit den im vorherigen Teil berechneten Winkeln insgesamt

$$\angle GEF = \angle GEA + \angle AEB + \angle BEF = 45^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 150^\circ \neq 180^\circ,$$

also liegen G, E und F nicht auf einer Geraden.

Bemerkung: Man kann natürlich auch ohne Benutzung der Winkel des vorherigen Teils argumentieren, dass FG aus Symmetriegründen parallel zu AB durch den Mittelpunkt des Quadrats verläuft, E aber nicht diesen Abstand von AB hat, da die Höhe im gleichseitigen Dreieck ΔABE nicht die Hälfte der Grundseite sein kann.

Lösung 2. (a) Die größte Zahl mit Quersumme 47 besteht aus 47 Einsen, da die Ziffer Null ja nicht benutzt werden soll und die Zahl weniger Stellen hätte und somit kleiner wäre, wenn größere Ziffern als die Eins benutzt werden.

(b) Die kleinste Zahl mit Quersumme 47 ist die 299999. Fünfstellige Zahlen haben nämlich höchstens Quersumme 45 und jede andere sechsstellige Zahl mit Quersumme 47 hätte eine größere erste Stelle und wäre somit größer.

(c) Beispielsweise ist die Differenz der Zahl 2345 und ihrer Quersumme

$$\begin{aligned}2345-(2+3+4+5) &= 2\cdot 1000+3\cdot 100+4\cdot 10+5\cdot 1-2-3-4-5\\ &= 2\cdot 1000-2+3\cdot 100-3+4\cdot 10-4+5\cdot 1-5\\ &= 2\cdot(1000-1)+3\cdot(100-1)+4\cdot(10-1)\\ &= 2\cdot 999+3\cdot 99+4\cdot 9\\ &= (2\cdot 111+3\cdot 11+4\cdot 1)\cdot 9\end{aligned}$$

ein Vielfaches von 9. Die Überlegung hinter dieser Beispielrechnung zeigt, dass die Behauptung für jede Zahl stimmt:

Jede Ziffer geht selbst als Summand in die Quersumme ein. In die Zahl geht jede Ziffer multipliziert mit ihrem Stellenwert als Summand ein, also multipliziert mit 1, 10, 100, … In die Differenz zwischen der Zahl und ihrer Quersumme geht die letzte Ziffer also $1-1=0$-mal ein, die vorletzte $10-1=9$-mal, die davor $100-1=99$-mal usw. Da 9, 99, 999 usw. Vielfache von 9 sind, nämlich $1\cdot 9$, $11\cdot 9$, $111\cdot 9$ usw., geht jede Ziffer mit einem Faktor multipliziert in die Differenz ein, der ein Vielfaches von 9 ist. Insgesamt ist die Differenz also auch ein Vielfaches von 9.

(d)
1. Da die Quersumme der Zahlen $1\cdot 9=9$, $2\cdot 9=18$, …, $10\cdot 9=90$ jeweils 9 ist, haben diese Zahlen die gesuchte Eigenschaft.
2. Die Zahlen 1 bis 9 sind 1-mal so groß wie ihre Quersumme, die zehnfachen dieser Zahlen, also 10, 20, …, 90, sind 10-mal so groß wie ihre Quersumme. Die Zahlen 12, 24, 36 und 48 sind 4-mal so groß wie ihre Quersumme, die Zahlen 21, 42, 63 und 84 sind 7-mal so groß wie ihre Quersumme. Bleibt zu zeigen, dass es für $n=2$, $n=3$, $n=5$, $n=6$, $n=8$ und $n=9$ nur die oben genannte Zahl $9\cdot n$ gibt, die n-mal so groß ist wie ihre Quersumme:

   Da die Zahl n-mal so groß sein soll wie die Quersumme, muss die Differenz von der Zahl und ihrer Quersumme genau $n-1$-mal so groß sein wie die Quersumme der Zahl. Die Differenz ist aber durch 9 teilbar wie oben gezeigt. Für die genannten n ist $n-1$ nicht durch 3 teilbar, also muss die Quersumme ein Vielfaches von 9 sein, die Zahl selbst also auch ein Vielfaches von 9. Da alle durch 9 teilbaren positiven zweistelligen Zahlen außer 99 die Quersumme 9 haben und die Zahl 99 kein Vielfaches ihrer Quersumme ist, ist $9 \cdot n$ die einzige solche Zahl.

(e) Die Vielfachen von 101 bis $99 \cdot 101$ sind von der Form, dass eine Zahl zweimal hintereinander geschrieben wird, eventuell mit einer Ziffer Null dazwischen. Da 18 gerade 2-mal so groß ist wie die Quersumme von 18, hat $18 \cdot 101 = 1818$ die Quersumme 18 und ist damit 101 mal so groß wie die Quersumme von 1818.

Lösung 3. (a) Anna bekommt Aufgabe 2, Ben 1, Clara 4, David 3 und Emily 5.

(b) Aufgaben 1, 2 und 4 können nur von insgesamt zwei Personen gelöst werden, nämlich von Ben und Emily. Die beiden können aber zusammen nur zwei Aufgaben lösen, nicht drei.

(c)

1. Wir nennen ein Teammitglied zusammen mit einer Aufgabe, die es lösen kann, eine Lösungsmöglichkeit. Da jedes Teammitglied genau zwei Aufgaben lösen kann, gibt es zweimal so viele Lösungsmöglichkeiten wie Teammitglieder. Da jede Aufgabe von genau zwei Teammitgliedern gelöst werden kann, gibt es auch genau zweimal so viele Lösungsmöglichkeiten wie Aufgaben. Also gibt es halb so viele Aufgaben und halb so viele Teammitglieder wie Lösungsmöglichkeiten, insbesondere ist die Anzahl der Teammitglieder und Aufgaben gleich.
2. Man gibt der ersten Person eine Aufgabe, die sie lösen kann. Nun betrachtet man die andere Person, die diese Aufgabe hätte lösen können und gibt ihr die andere Aufgabe, die sie lösen kann. So fährt man fort, bis man die andere Aufgabe verteilt hat, die die erste Person hätte lösen können. Dies ist immer möglich, da man bei dem Verfahren zum Einen für jede Person (außer der ersten) immer beide Aufgaben direkt nacheinander abarbeitet, die diese Person lösen kann, und zum Anderen für jede Aufgabe immer beide Personen direkt nacheinander abarbeitet, die diese lösen können. Man findet also immer als nächstes eine Aufgabe bzw. Person, die man noch nie vorher angekuckt und zugeordnet hat, bis man die andere Aufgabe der ersten Person findet und einen *Kreis* schließt.

   Nun hat man dasselbe Problem wie vorher, nur dass eine gewisse Anzahl Personen und dieselbe Anzahl Aufgaben bereits verteilt sind. Man beginnt also mit einer neuen „ersten“ Person und geht wieder so vor, bis man einen zweiten *Kreis* schließt. So fährt man fort, bis man alle Aufgaben verteilt hat.

Bemerkung: Fragestellungen dieser Art lassen sich gut mit Hilfe der Graphentheorie modellieren und sind Spezialfälle des sogenannten Heiratssatzes von Philip Hall.

Lösung 4. (a) Man füllt fünfmal 3 Liter aus Eimer B in Eimer C und leert Eimer C die ersten vier Male dann vollständig aus, dann sind in Eimer A 3 Liter Sirup, in Eimer B 5 Liter Wasser und in Eimer C 3 Liter Wasser. Nun kann man Eimer A aus Eimer C auf 5 Liter auffüllen, von denen 3 Liter Sirup sind. Schüttet man noch die 5 Liter Wasser aus Eimer B dazu, hat man wie gewünscht in Eimer A 10 Liter Flüssigkeit, von denen 3 Liter Sirup sind.

(b) Es sollen 7 Liter Wasser im Sirupwasser enthalten sein, also muss n mindestens 7 sein, damit dies möglich ist.

(c) Ist n ein Vielfaches von 3, zum Beispiel $n = 9$, so ist in jedem Eimer stets ein Vielfaches von 3 an Flüssigkeit enthalten. Also können nie 10 Liter in einem Eimer sein.

Zur Begründung überprüft man alle Aktionen: Nach dem Ausleeren eines Eimers sind 0 Liter enthalten, also wieder ein Vielfaches von 3. Schüttet man zwei Eimer zusammen, addiert man zwei Literzahlen, die beide Vielfache von 3 sind, erhält also wieder ein Vielfaches von 3. Füllt man einen Eimer auf den Stand eines anderen auf, in dem ein Vielfaches von 3 ist, hat der aufgefüllte Eimer auch ein Vielfaches von 3 Inhalt. Die Differenz der alten und neuen Menge des aufgefüllten Eimers ist auch ein Vielfaches von 3, da beide Vielfache von 3 sind. Diese Differenz wurde auch aus dem dritten Eimer entnommen, in dem somit auch ein Vielfaches von 3 um ein Vielfaches von 3 vermindert wurde, so dass wieder ein Vielfaches von 3 enthalten ist. Bei jeder Aktion sind also danach nur Vielfache von 3 in allen Eimern, wenn dies zuvor schon der Fall war.

(d) In den vorherigen Aufgabenteilen hat sich ergeben, dass n mindestens 7 sein muss und kein Vielfaches von 3 sein darf. Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so kann man 10 Liter 30-prozentiges Sirupwasser immer herstellen:

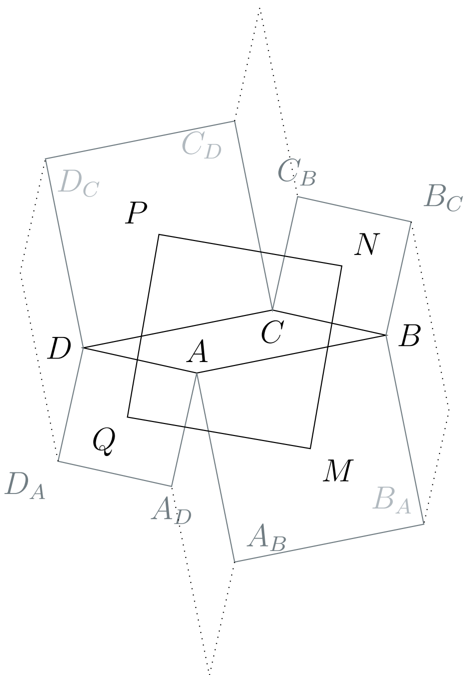
Ist $n-2$ ein Vielfaches von 3, so verwirft man wie oben immer wieder 3 Liter über Eimer C, bis man noch 5 Liter Wasser in Eimer B und 3 Liter Wasser in Eimer C hat. Wie oben kann man dann Eimer A auf 5 Liter auffüllen und mit Eimer B kombinieren.

Ist $n-1$ ein Vielfaches von 3, so verwirft man über Eimer C solange jeweils 3 Liter, bis noch 7 Liter in Eimer B übrig sind. Diese schüttet man dann zu den 3 Litern Sirup in Eimer A.

Lösungen 9, 10

Lösung 1. (a) 1. Bei einer Punktspiegelung am Mittelpunkt des Parallelogramms $ABCD$ fallen M und P aufeinander sowie N und Q. Also sind gegenüberliegende Seiten in $MNPQ$ parallel und es ist ein Parallelogramm.

2. Die über den Seiten von $ABCD$ errichteten Quadrate seien AA_BB_AB, BB_CC_BC, CC_DD_CD und DD_AA_DA.



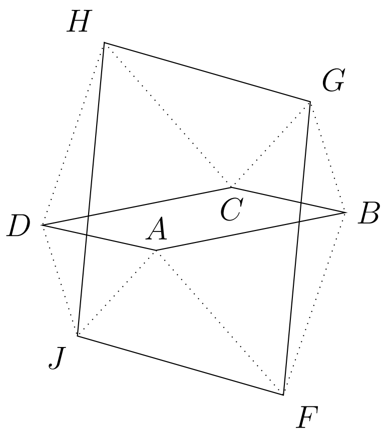
Es gilt $\angle BAD + \angle CBA = 180°$, da gegenüberliegende Winkel im Parallelogramm gleich sind und alle zusammen $360°$ ergeben. Außerdem ist $\angle BAD + \angle A_DAA_B = 180°$, da die beiden Winkel zusammen mit zwei rechten Winkeln einen Vollwinkel bilden. Also ist $\angle A_DAA_B = \angle CBA = \angle ADC$.

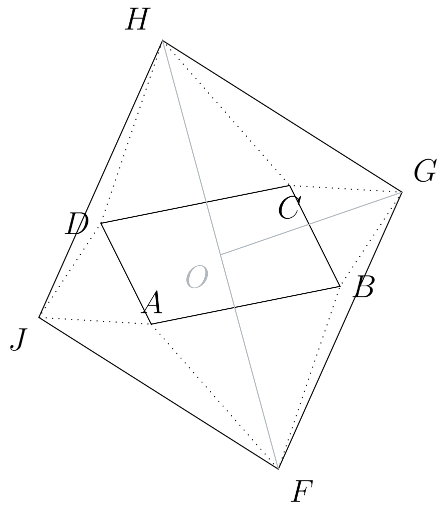
Da für jeweils gemeinsame Seiten an einem Quadrat $|A_BA| = |AB|$ und $|AA_D| = |AD| = |BC|$ gilt, sind ΔCBA und ΔA_DAA_B kongruent. Dreht man also ΔCBA um $90°$ um M, so fällt es auf ΔA_DAA_B. Deshalb fällt bei derselben Drehung das Quadrat CBB_CC_B auf A_DADD_A und ebenso N auf Q. Es gilt also $|MN| = |MQ|$ und $\angle NMQ = 90°$. Somit ist das Parallelogramm $MNPQ$ sogar ein Quadrat.

Bemerkung: Man kann statt des letzten Absatzes auch wie folgt weiter argumentieren: $\angle NBM = \angle NBC + \angle CBA + \angle ABM = 45° +$

$\angle CBA + 45° = \angle QAA_D + \angle A_DAA_B + \angle A_BAM = \angle QAM$. Da $|NB| = |QA|$ und $|BM| = |AM|$ sind, ist ΔNBM kongruent zu ΔQAM. Da B bei einer Drehung um 90° um M auf A fällt, fällt also MN bei derselben Drehung auf MQ. Es gilt also $|MN| = |MQ|$ und $\angle NMQ = 90°$. Somit ist das Parallelogramm $MNPQ$ sogar ein Quadrat.

(b) 1. Die Argumentation ist exakt dieselbe wie im ersten Abschnitt der vorherigen Teilaufgabe, nur dass M, N, P und Q jetzt F, G, H und J entsprechen.





2. Ist $ABCD$ eine Raute, so gehen F und G bei der Spiegelung an der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle CBA$ ineinander über. Da diese Winkelhalbierende der Diagonalen BD von $ABCD$ entspricht, gehen bei der Spiegelung daran auch H und J ineinander über. Also gehen auch ΔGFJ und ΔFGH bei dieser Spiegelung ineinander über und es gilt $\angle GFJ = \angle HGF$, das Parallelogramm $FGHJ$ ist somit ein Rechteck.

   Wenn $ABCD$ eine Raute ist, ist $FGHJ$ also ein Rechteck, es ist aber ohne weitere Voraussetzung im Allgemeinen kein Quadrat: Damit $FGHJ$ paarweise gleichlange Seiten hat, muss $ABCD$ ein Rechteck sein, wie im nächsten Teil bewiesen wird.

   Bemerkung: Man kann auch leicht anders als im ersten Absatz argumentieren. Ist $ABCD$ eine Raute, so gehen G und F durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden von $\angle CBA$ ineinander über, auf der auch der Mittelpunkt O des Parallelogramms $ABCD$ liegt. In dem Fall ist also $|GO| = |FO|$. Gleichzeitig ist O immer der Mittelpunkt von FH, da gegenüberliegende Dreiecke durch Punktspiegelung an O ineinander übergehen. Also liegt G auf dem Kreisbogen über dem Durchmesser FH. Damit ist nach dem Satz des Thales $\angle HGF$ ein rechter Winkel und $FGHJ$ somit ein Rechteck.

3. Wenn $FGHJ$ eine Raute ist, dann ist $ABCD$ ein Rechteck. Im Folgenden wird sogar gezeigt, dass $ABCD$ genau dann ein Rechteck ist, wenn $FGHJ$ eine Raute ist.

   Genau wenn das Parallelogramm $FGHJ$ eine Raute ist, ist $|FJ| = |FG|$. Da die Seitenlängen eines der gleichseitigen Dreiecke gleich sind und auch mit denen des am Mittelpunkt der Figur gespiegelten Dreiecks übereinstimmen, ist immer $|AF| = |BF|$ und $|AJ| = |BG|$. Also ist das Parallelogramm $FGHJ$ genau dann eine Raute, wenn die Dreiecke ΔJFA und ΔGFB kongruent sind, und das ist genau dann der Fall, wenn $\angle JAF = \angle FBG$ bzw. $\angle JAF = 180° - \angle FBG$ ist, Letzteres, wenn von A und B ein Punkt innerhalb und einer außerhalb von $FGHJ$ liegt.

   Man stellt den Zusammenhang von $\angle JAF$ und $\angle FBG$ zu den Parallelogrammwinkeln her, indem man beobachtet, dass sie sich jeweils zusammen mit zwei 60°-Winkeln zu Vollwinkeln ergänzen, es gelten die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \angle JAF &= 360° - 60° - \angle BAD - 60° = 240° - \angle BAD \text{ und} \\ \angle FBG &= 360° - 60° - \angle CBA - 60° = 240° - \angle CBA\,. \end{aligned}$$

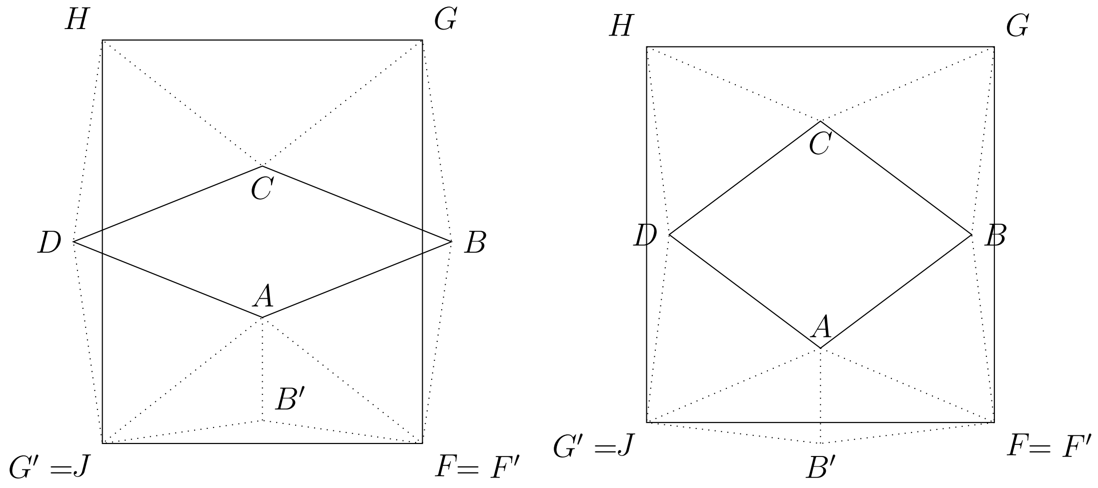
   Der Fall $\angle JAF = 180° - \angle FBG$ kann also gar nicht auftreten, da sonst

$$\begin{aligned} 180° &= \angle JAF + \angle FBG \\ &= 480° - (\angle BAD + \angle CBA) = 480° - 180° = 300° \end{aligned}$$

   gelten müsste, weil im Parallelogramm immer $\angle BAD + \angle CBA = 180°$ gilt.

   Der Fall $\angle JAF = \angle FBG$ gilt nach den beiden Gleichungen genau dann, wenn $\angle BAD = \angle CBA$ ist. Wegen $\angle BAD + \angle CBA = 180°$ ist genau dann $\angle BAD = \angle CBA = 90°$, das Parallelogramm $ABCD$ also ein Rechteck.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Dass $ABCD$ ein Rechteck sein muss, damit $FGHJ$ eine Raute ist, wurde oben bereits gezeigt.



Nun wird weiter untersucht, wann $FGHJ$ ein Rechteck ist. Ist $FGHJ$ ein Rechteck, so sei $\Delta F'B'G'$ das 90° um F gedrehte und so gestreckte Dreieck ΔFBG, dass $F' = F$ ist und G' auf J fällt. Es ist $\angle AFB' = \angle BFB' - \angle BFA = 90° - 60° = 30°$. Des Weiteren ist $\angle F'G'B' = \angle FGB = \angle HJD$ und $\angle FJH = 90°$, also ist auch $\angle B'JA = 30°$. Die Verhältnisse $\frac{|AF|}{|B'F|} = \frac{|BF|}{|B'F'|}$ und $\frac{|AJ|}{|B'J|} = \frac{|DJ|}{|B'G'|} = \frac{|BG|}{|B'G'|}$ sind jeweils der Streckungsfaktor aus der Konstruktion von $\Delta F'B'G'$. Also haben in den Dreiecken $\Delta AFB'$ und $\Delta AJB'$ jeweils zwei Seiten dasselbe Verhältnis zueinander und der dazwischenliegende Winkel stimmt überein, so dass die Dreiecke ähnlich sind. Da die Dreiecke außerdem die Seite AB' gemeinsam haben, sind sie sogar kongruent. Es gilt also $|AF| = |AJ|$ und damit auch $|AB| = |AD|$, das Parallelogramm $ABCD$ muss also eine Raute sein.

Genau, wenn $ABCD$ eine Raute ist, ist $FGHJ$ also ein Rechteck, genau, wenn $ABCD$ ein Rechteck ist, ist $FGHJ$ also eine Raute. Somit ist $FGHJ$ genau dann ein Quadrat, wenn $ABCD$ ebenfalls ein Quadrat ist.

Bemerkung: Um zu zeigen, dass $ABCD$ eine Raute sein muss, damit $FGHJ$ ein Rechteck ist, kann man auch feststellen, dass dafür nach der Umkehrung des Satzes von Thales $|GO| = |FO| = |HO|$ gelten muss und nachrechnen, dass $ABCD$ dann eine Raute sein muss: Ohne Einschränkung sei $O = (0, 0)$, $B = (2, 0)$ und $C = (x, y)$. Dann erhält man G, indem man BC um 90° dreht mit $\frac{\sqrt{3}}{2}$ multipliziert und zum Mittelpunkt von BC hinzuaddiert, also ist $G = (y, 1 - x) \cdot \sqrt{3} + (1 + x, y)$. Da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, ist $A = (-x, -y)$ und man erhält analog zu G auch $F = (y, -1 - x) \cdot \sqrt{3} + (1 - x, -y)$. Man berechnet (mit dem Satz des Pythagoras)

$$
\begin{aligned}
|FO|^2 &= (\sqrt{3}y + 1 - x)^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{3}x + y)^2 \,, \\
|GO|^2 &= (\sqrt{3}y + 1 + x)^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{3}x + y)^2
\end{aligned}
$$

und damit

$$|GO|^2 - |FO|^2 = 4x + 4\sqrt{3}xy - 12x - 4\sqrt{3}xy = -8x\,.$$

Es ist also $|FO| = |GO|$ genau dann, wenn $x = 0$ gilt, C und A also auf der y-Achse liegen, während B auf der x-Achse liegt. Genau dann ist $|AB| = |BC|$ und das Parallelogramm $ABCD$ eine Raute.

Lösung 2. (a) $2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$ ist nicht durch 10 teilbar, $2^6 - 2^2 = 64 - 4 = 60$ ist durch 10 teilbar.

(b) Da sich die Endziffer bei der Multiplikation nur aus den Endziffern der Faktoren ergibt, wiederholen sich die letzten Stellen 2, 4, 8, 6, 2, 4, … der 2er-Potenzen 2, 4, 8, 16, 32, 64, … immer nach vier Schritten und vorher nicht. Also hat $2^n - 2^m$ für $n, m \geq 1$ genau dann die Endziffer 0 und ist damit durch 10 teilbar, wenn $n - m$ durch 4 teilbar ist.

(c) Für $n, m > 1$ sind 2^n und 2^m durch 4 teilbar, also ist auch deren Differenz $2^n - 2^m$ durch 4 teilbar und $2^{2^n} - 2^{2^m}$ hat damit nach der Lösung des vorherigen Aufgabenteils die Endziffer 0 und ist durch 10 teilbar.

(d) Die 3er-Potenzen 3, 9, 27, 81, 243, … haben im 10er-System ebenfalls nach vier Schritten wieder dieselbe Endziffer, $3^n - 3^m$ ist jedoch nur dann durch 4 teilbar, wenn $n - m$ durch 2 teilbar ist: 3^1, 3^2, 3^3 usw. lassen nämlich immer abwechselnd den Rest 3 bzw. 1 bei der Teilung durch 4 und nur genau dann, wenn 3^n und 3^m denselben Rest lassen, ist die Differenz durch 4 teilbar.

Bemerkung: $2^{2^n} - 2^{2^m}$ ist für $n > m > 1$ immer durch $2^{2^3} - 2^{2^2} = 2^4 \cdot (2^4 - 1) = 240$ teilbar, $3^{3^n} - 3^{3^m}$ ist durch $3^{3^3} - 3^{3^2} = 3^9 \cdot (3^{18} - 1)$ teilbar. Dies ist der Fall, da die Differenzen von der Form $2^{4\ell} \cdot (2^{4k} - 1)$ mit natürlichen k und ℓ sind und $(2^4)^k - 1^k$ durch $2^4 - 1$ teilbar ist, weil $a^k - b^k$ immer durch $a - b$ teilbar ist. Analog sind Differenzen von der Form $3^{9\ell} \cdot (3^{18k} - 1)$ und $(3^{18})^k - 1^k$ ist durch $3^{18} - 1$ teilbar.

Lösung 3. (a) Legt man bei der ersten Wägung eine rote und eine gelbe Kugel auf die eine Seite und eine gelbe und eine blaue auf die andere, dann liegen auf beiden Seiten verschieden schwere gelbe. Falls die Waage im Gleichgewicht ist, sind also die rote und die blaue Kugel verschieden schwer. In diesem Fall ermittelt man mit einer weiteren Wägung, welche von beiden leicht und welche schwer ist. Die leichte gelbe ist dann die, die bei der schweren Kugel liegt.

Falls die Waage im Ungleichgewicht ist, muss die leichte gelbe Kugel auf der leichteren Seite liegen. Bei der zweiten Wägung legt man dann die rote und die blaue Kugel aus den beiden Waagschalen zusammen in die linke Schale und die andere rote und andere blaue Kugel in die rechte Schale. Falls die Waage im Gleichgewicht ist, liegt auf jeder Seite eine schwere und eine leichte Kugel. In der linken Schale ist dann die Kugel leicht, die zuvor auf der leichten Seite war, und die andere ist schwer. Falls die Waage bei der zweiten Wägung im Ungleichgewicht ist, liegen auf der leichten Seite die beiden leichten Kugeln. Das Vorgehen bei Ungleichgewicht in der ersten Wägung ist in der folgenden Tabelle zu sehen

(Die Kugeln einer Farbe sind von 1 bis 2 nummeriert. Der nicht dargestellte Ungleichgewichtsfall entspricht dem anderen, wenn die Farben rot und blau vertauscht werden.)

1. Wägung	❶ ① ; ① ②		
Ergebnis 1. Wägung	$<$		
2. Wägung	❶ ① ; ❷ ②		
Ergebnis 2. Wägung	$<$	$>$	$=$
leichte Kugeln	❶ ①	❷ ②	❶ ②

(b) Eine Möglichkeit ist, zunächst auf eine Seite zwei blaue und eine rote Kugel und auf die andere eine blaue und zwei rote zu legen. Ist eine von beiden Seiten schwerer, müssen die beiden leichten Kugeln unter den fünf Kugeln sein, die nicht auf der schweren Seite liegen. Darunter sind drei von einer Farbe und zwei der anderen. Wägt man jeweils zwei gleichfarbige dieser Kugeln gegeneinander, so ist entweder eine von beiden leicht und die andere schwer oder sie sind gleich schwer und die dritte Kugel dieser Farbe ist die leichte. Der andere Fall, wenn die erste Wägung ein Gleichgewicht ergibt, wird in der folgenden Tabelle behandelt:

(Die Kugeln einer Farbe sind von 1 bis 4 nummeriert. Der nicht dargestellte Ungleichgewichtsfall entspricht jeweils dem anderen, wenn die Nummerierung angepasst wird.)

1. Wägung	❶ ❷ ③		① ② ❸	
Ergebnis 1. Wägung	=			
2. Wägung	①		②	
Ergebnis 2. Wägung	<		=	
3. Wägung	❶	❷	③	④
Ergebnis	<		<	
leichte Kugeln	❶ ①		❸ ③	

Falls die Waage bei der ersten Wägung im Gleichgewicht ist, wägt man die beiden roten aus derselben Waagschale gegeneinander. Ist eine leichter, muss auch unter den beiden blauen auf der anderen Waagschale eine leichte sein, die man mit einer weiteren Wägung ermittelt. Sind beide gleich schwer, so muss eine der beiden anderen roten leicht sein. Welche, ermittelt man durch eine weitere Wägung. Daraus ergibt sich auch die leichte blaue Kugel: Lag die leichte rote Kugel bei der ersten Wägung zusammen mit zwei blauen Kugeln in einer Waagschale, dann hat die leichte blaue auf der anderen Seite gelegen. Im anderen Fall lagen beide leichte Kugeln bei der ersten Wägung nicht auf der Waage.

(c) Jede Wägung kann drei verschiedene Ergebnisse haben, drei Wägungen können also $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ mögliche Ergebnisse haben. Es gibt jeweils sechs Möglichkeiten, welche der sechs roten und welche der sechs blauen Kugeln leicht ist. Man kann $6 \cdot 6 = 36$ Möglichkeiten nicht unterscheiden, wenn man nur 27 mögliche Ergebnisse hat, also kommt man nicht in jedem Fall mit drei Wägungen aus.

(d) Man kommt zum Beispiel mit folgendem Vorgehen mit drei Wägungen aus: Zunächst legt man jeweils zwei blaue und zwei rote Kugeln in jede Waagschale. Falls eine der beiden Seiten leichter ist, werden in den nächsten beiden Wägungen einmal die beiden roten und einmal die beiden blauen Kugeln der leichten Seite gegeneinander gewogen. Falls eine der beiden Kugeln leichter als die andere ist, hat man die leichte Kugel gefunden. Falls von einer Farbe beide Kugeln gleich schwer sind, kann von den Kugeln dieser Farbe nur die leicht sein, die noch auf keiner Waagschale lag.

Falls beide Seiten gleich schwer sind, geht man wie folgt vor:

(Die Kugeln einer Farbe sind von 1 bis 5 nummeriert. Der nicht dargestellte Ungleichgewichtsfall entspricht jeweils dem anderen, wenn die Nummerierung angepasst und ggf. die Farben vertauscht werden.)

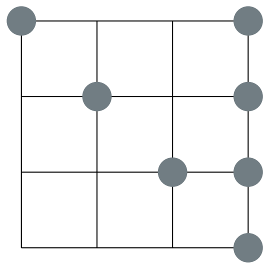
<table>
<tr><td>1. Wägung</td><td colspan="2">❶❷③④</td><td colspan="2">①②❸❹</td></tr>
<tr><td>Ergebnis 1. Wägung</td><td colspan="4">=</td></tr>
<tr><td>2. Wägung</td><td colspan="2">❶①❺</td><td colspan="2">❸③⑤</td></tr>
<tr><td>Ergebnis 2. Wägung</td><td colspan="2"><</td><td colspan="2">=</td></tr>
<tr><td>3. Wägung</td><td>❶</td><td>①</td><td>❷</td><td>❹</td></tr>
<tr><td>Ergebnis</td><td><</td><td>=</td><td><</td><td>=</td></tr>
<tr><td>leichte Kugeln</td><td>❶ ②</td><td>❶ ①</td><td>❷ ②</td><td>❺ ⑤</td></tr>
</table>

Da bei der ersten Wägung beide Seiten gleich schwer sind, sind auch die beiden dabei nicht gewägten Kugeln gleich schwer. Wenn bei der zweiten Wägung eine Seite leichter ist, müssen sie also beide schwer sein. In diesem Fall sind entweder beide anderen Kugeln der leichten Seite leicht und daher gleich schwer oder nur eine ist leicht. Falls nur eine davon leicht ist, hat die leichte Kugel der anderen Farbe bei der ersten Wägung auf der anderen Seite und bei der zweiten Wägung nicht auf der Wage gelegen. Dadurch ist sie eindeutig bestimmt.

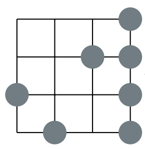
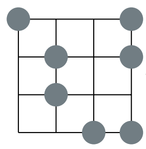
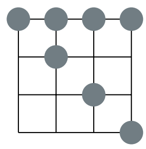
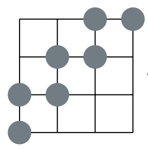
Sind auch bei der zweiten Wägung beide Seiten gleich schwer, liegt entweder auf jeder Seite eine leichte Kugel oder keine der leichten Kugeln liegt in der Waage. Welcher Fall zutrifft, ermittelt man, indem man die beiden blauen Kugeln, die nicht auf der Waage liegen, bei der dritten Wägung in je eine Waagschale legt. Sofern man dabei die leichte blaue findet, ist von den roten die Kugel leicht, die bei der ersten Wägung auf der anderen Seite als die leichte blaue lag und sich bei der zweiten Wägung nicht auf der Waage befand. Falls die Waage bei der dritten Wägung im Gleichgewicht ist, muss bei der zweiten Wägung in jeder Schale eine leichte gewesen sein. Das können nur die beiden Kugeln sein, die bei der ersten Wägung nicht auf der Waage lagen: Unter den anderen Kugeln hat jedes Paar aus verschiedenfarbigen Kugeln von verschiedenen Seiten dieser Wägung bei der ersten Wägung auf einer Seite gelegen.

Lösung 4. (a) Man betrachtet eine Teilmenge von $[3]^2$ mit mindestens sechs Punkten, zu der alle Punkte einer Spalte gehören. Es gibt dann eine weitere Spalte mit mindestens zwei Punkten und diese bilden zusammen mit zwei Punkten der zuerst betrachteten Spalte ein Rechteck aus vier Punkten, welches ein L enthält. Also müssten zwei Punkte pro Spalte zu einer L-freien Teilmenge von $[3]^2$ mit mindestens sechs Punkten gehören. In einer solchen dürften aber keine weiteren Punkte rechts neben dem unteren Punkt der ersten Spalte enthalten sein, so dass in den anderen beiden Spalten jeweils Punkte derselben beiden übrigen Zeilen enthalten sein müssten. Dann ist aber in jedem Fall ein L enthalten.

(b) Eine mögliche L-freie Teilmenge von $[4]^2$ mit sieben Punkten:

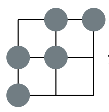
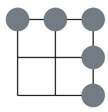
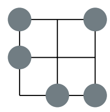


(c) Ja, zum Beispiel

, ,  oder .

(d) Der Punkt rechts oben (n, n) liegt in keinem L und ist deswegen in jeder größten L-freien Menge enthalten.

(e) Es gibt keinen weiteren solchen Punkt. Für $[3]^2$ haben die drei L-freien Mengen

,  und 

nur die rechte obere Ecke $(3, 3)$ gemeinsam und aus dem ersten Teil ist bekannt, dass es keine größeren L-freien Mengen gibt.

Bemerkung: Dieses Beispiel kann man für jedes n verallgemeinern. Die folgenden drei L-freien Mengen haben keinen gemeinsamen Punkt außer (n, n): 1. die Diagonale (i, i) und Nebendiagonale $(i, i + 1)$, 2. die oberste Zeile (i, n) und letzte Spalte (n, i) und 3. die unterste Zeile $(i, 1)$ ohne $(1, 1)$, erste Spalte $(1, i)$ ohne $(1, 1)$ zusammen mit (n, n) und wie der letzte Aufgabenteil zeigt, sind diese Mengen größte L-freie Mengen in $[n]^2$.

(f) Eine größte L-freie Teilmenge von $[n]^2$ kann $2n - 1$ Elemente enthalten, wie im vorherigen Aufgabenteil angegeben. Mehr Elemente kann eine größte L-freie Teilmenge auch nicht enthalten, wie nun gezeigt wird. Von der i-ten Spalte seien s_i Elemente enthalten. Von diesen blockieren jeweils alle bis auf das oberste die restliche Zeile, es werden also $s_1 - 1$ Zeilen von den Elementen der ersten Spalte blockiert, $s_2 - 1$ von Elementen der zweiten Spalte usw. Insgesamt werden

$$(s_1 - 1) + (s_2 - 1) + \ldots + (s_n - 1) = s_1 + s_2 + \ldots + s_n - n$$

Zeilen unterhalb der obersten blockiert. Es gibt aber nur $n - 1$ Zeilen unterhalb der obersten, also ist $s_1 + s_2 + \ldots + s_n - n \leq n - 1$ bzw.

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n \leq 2n - 1\,.$$

Die Anzahl der Elemente der Teilmenge ist gerade $s_1 + s_2 + \ldots + s_n$, so dass eine L-freie Teilmenge maximal $2n - 1$ Elemente enthalten kann.

Bemerkung: Man kann alternativ auch induktiv immer kleinere Gitter betrachten, indem man die durch Elemente der ersten Spalte bzw. obersten Zeile blockierten Zeilen bzw. Spalten entfernt. Eine weitere Alternative für Graphentheoretiker ist, die Spalten und Zeilen als Ecken eines bipartiten Graphen zu betrachten und die Elemente der Menge als Kanten. Dann muss man Kreise in Graphen mit $2n$ Ecken und $2n$ Kanten suchen, die es immer gibt. Man betrachtet dann die Kante aus einem Kreis mit den höchsten Koordinaten und die beiden im Kreis benachbarten Kanten: Die diesen Kanten entsprechenden Elemente der Menge bilden ein L.

Lösungen 11, 12, 13

Lösung 1. Die Länge der einen Kathete sei $1+x$, die der anderen $1+y$. Zunächst wird y in Abhängigkeit von x bestimmt: Die Steigung der Hypotenuse ist $\frac{y}{1}$ und auch $\frac{1}{x}$ (jeweils über die Seitenlängen der beiden „kleinen" Dreiecke), also gilt

$$y = \frac{1}{x}\,.$$

Der Flächeninhalt des normalen Dreiecks ist dann

$$F(x) = \frac{1}{2}(1+x)(1+y) = \frac{1}{2}(1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\,.$$

(a) Ist ohne Einschränkung $1+x=3$, also $x=2$, so ist der Flächeninhalt des normalen Dreiecks

$$F(2) = 1 + \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}\,.$$

(b) Für x ist jeder Wert größer 0 möglich, dafür gilt $x+\frac{1}{x} > x$, also kann $F(x)$ beliebig große Werte annehmen. Um den minimalen möglichen Wert von $F(x)$ zu bestimmen, kann man die Nullstellen der Ableitung berechnen,

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

hat als einzige positive Lösung $x=1$, an der der Funktionswert $F(1)=2$ ist. Da $F(x) > 2$ für $x < \frac{1}{2}$ gilt, ist $F(1)=2$ wirklich der minimale Wert. Da $F(x)$ stetig ist, kann jeder Wert größer 2 auch angenommen werden, jeder reelle Wert größer gleich 2 ist für den Flächeninhalt möglich.

Bemerkung: Möchte man keine Ableitung verwenden, kann man sich den minimalen Wert trotzdem überlegen: Man stellt fest, dass $x+\frac{1}{x}$ ab $x=1$ steigt, da x schneller wächst als $\frac{1}{x}$ fällt (was man eigentlich noch nachrechnen müsste). Unterhalb von $x=1$ vertauschen sich die Rollen von x und $\frac{1}{x}$, also fällt es dort, so dass $x=1$ das Minimum ist.

(c) 1. Hat die Hypotenuse die Länge 3, so ist nach dem Satz des Pythagoras

$$3^2 = (1+x)^2 + (1+y)^2 = (1+x)^2 + \left(1+\frac{1}{x}\right)^2$$

und man möchte $x+\frac{1}{x}$ bestimmen, aus dem sich dann sofort der Flächeninhalt ergibt. Multipliziert man aus, erhält man

$$1 + 2x + x^2 + 1 + 2\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 2\left(x+\frac{1}{x}\right) + x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 9\,,$$

worin außer dem gesuchten $x + \frac{1}{x}$ aber noch $x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2$ vorkommt. Dies unterscheidet sich nur um eine Konstante von

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\,,$$

so dass mit der Ersetzung $X = x + \frac{1}{x}$ die Gleichung lautet

$$2X + X^2 = 9\,.$$

Mit quadratischer Ergänzung liest man aus

$$(X+1)^2 = 10$$

die Lösungen $X = -1 \pm \sqrt{10}$ ab, von denen allerdings nur $X = \sqrt{10} - 1$ nicht negativ ist. Der Flächeninhalt F ist also

$$F = 1 + \frac{1}{2}X = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{10}\,.$$

2. Hat die Hypotenuse die Länge 3, wurde eben schon berechnet

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt{10} - 1\,,$$

man kann mit $x \neq 0$ multiplizieren und erhält

$$x^2 - (\sqrt{10} - 1)x + 1 = 0\,,$$

also

$$x^2 - (\sqrt{10} - 1)x + \left(\frac{\sqrt{10} - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10} - 1}{2}\right)^2 - 1\,,$$

zusammengefasst

$$\left(x - \frac{\sqrt{10} - 1}{2}\right)^2 = \frac{7 - 2\sqrt{10}}{4}\,.$$

Daraus erhält man die Lösungen

$$x = \frac{\sqrt{10} - 1}{2} \pm \sqrt{\frac{7 - 2\sqrt{10}}{4}}\,,$$

wobei $\frac{1}{x}$ jeweils die andere Lösung ist. Zu den Lösungen muss man noch 1 addieren, um die Längen der beiden Katheten $1 + x$ und $1 + \frac{1}{x}$ zu erhalten:

$$\frac{1 + \sqrt{10} \pm \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}}{2}$$

Lösung 2. (a) Schnittpunkte von $x^2 + a_1x + b_1$ und $x^2 + a_2x + b_2$ erhält man als Lösungen von $x^2 + a_1x + b_1 = x^2 + a_2x + b_2$, also

$$(a_1 - a_2)x = b_2 - b_1\,.$$

Zwei oder mehr Lösungen kann diese Gleichung nur für $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$ haben, also wenn zweimal dieselbe Parabel betrachtet wird. Genau zwei Schnittpunkte kann es also nie geben. Ist $a_1 = a_2$, aber $b_1 \neq b_2$, so hat die Gleichung keine Lösung. Ist $a_1 \neq a_2$, so hat die Gleichung genau die eine Lösung $x = \frac{b_2-b_1}{a_1-a_2}$. Zwei verschiedene Parabeln haben also keinen Schnittpunkt für $a_1 = a_2$ und genau einen Schnittpunkt für $a_1 \neq a_2$.

(b) Die vier Parabeln seien $x^2+a_ix+b_i$ mit $i = 1, 2, 3, 4$. Wäre $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, so hätten die Parabeln keine Schnittpunkte, da sie nicht identisch sein dürfen. Gäbe es drei oder mehr verschiedene Werte unter den a_i, so gäbe es mehr als vier Schnittpunkte. Also gibt es zwei verschiedene Werte unter den a_i, jeden zweimal, da es sonst nur drei Schnittpunkte gäbe. Ohne Einschränkung sei $a_1 = a_2$ und $a_3 = a_4$ (die Parabeln können so nummeriert sein). Die Stellen der Schnittpunkte sind

$$\frac{b_3 - b_1}{a_1 - a_3}\,, \quad \frac{b_4 - b_1}{a_1 - a_3}\,, \quad \frac{b_3 - b_2}{a_1 - a_3} \quad \text{und} \quad \frac{b_4 - b_2}{a_1 - a_3}$$

und es gilt

$$\frac{b_3 - b_1}{a_1 - a_3} + \frac{b_4 - b_2}{a_1 - a_3} = \frac{b_4 - b_1}{a_1 - a_3} + \frac{b_3 - b_2}{a_1 - a_3}\,.$$

Die Verhältnisse können den Stellen $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ so zugeordnet werden, dass die Gleichung $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$ entspricht, da für solche Stellen stets $x_1 + x_2 < x_3 + x_4$ und $x_1 + x_3 < x_2 + x_4$ gilt.

Bemerkung: Man kann auch geometrischer argumentieren. Die Parabeln $x^2 + a_1x + b_1$ und $x^2 + a_2x + b_2$ schneiden sich genau dann, wenn sich die Geraden $a_1x + b_1$ und $a_2x + b_2$ schneiden. Damit sich die vier Parabeln auf die geforderte Weise schneiden, müssen die dazugehörigen Geraden ein Parallelogramm bilden: Drei paarweise nicht-parallele Geraden haben bereits drei Schnittpunkte, so dass sich mit der vierten zu viele Schnittpunkte ergäben, drei paarweise parallele Geraden hätten keinen Schnittpunkt, so dass sich mit der vierten zu wenige Schnittpunkte ergäben. Für die Koordinaten des Parallelogramms gilt $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$, also auch $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.

Lösung 3. Vorüberlegung: Woran kann man an Dreieckspunkten auf dem Umkreis erkennen, dass das Dreieck rechtwinklig, stumpfwinklig oder spitzwinklig ist?

Nach dem Satz von Thales liegen rechte Winkel auf einem Kreisbogen über einem Kreisdurchmesser, zwei Punkte müssen sich also auf dem Umkreis genau gegenüber liegen, damit das Dreieck (am dritten Punkt) rechtwinklig ist.

Hält man den Punkt mit dem rechten Winkel fest und verschiebt die anderen beiden Punkte in Richtung des ersten, wird der Winkel am ersten Punkt größer, also ein stumpfer Winkel. Ein stumpfer Winkel entsteht also, wenn drei Punkte auf einem gemeinsamen Halbkreis liegen, und zwar am mittleren der Punkte entlang des Halbkreisbogens.

Liegen die drei Punkt auf keinem gemeinsamen Halbkreisbogen, so ist das Dreieck spitzwinklig.

Ein gerades bzw. ungerades n-Eck sei im Folgenden ein n-Eck mit geradem bzw. ungeradem n.

(a) In ungeraden n-Ecken gibt es keine sich diametral (d. h. genau) gegenüberliegenden Punkte. Nach der Vorüberlegung kann ein rechtwinkliges Dreieck also nicht aus Punkten eines ungeraden n-Ecks bestehen. Die Wahrscheinlichkeit ist 0.

(b) In einem geraden n-Eck ist die Wahrscheinlichkeit, dass zu einem festen A ein zufällig gewählten Eckpunkt B diametral gegenüber liegt genau $\frac{1}{n}$. Damit ein rechtwinkliges Dreieck entsteht muss C verschieden von A und B sein, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{n-2}{n}$ ist. Also ist die Wahrscheinlichkeit eines rechtwinkligen Dreiecks mit rechtem Winkel bei C gerade $\frac{1}{n} \cdot \frac{n-2}{n}$. Die Wahrscheinlichkeit eines rechtwinkligen Dreiecks mit rechtem Winkel bei A, B oder C ist somit
$$\frac{3(n-2)}{n^2},$$
da jedes Dreieck nur einen rechten Winkel haben kann, die Ereignisse also nicht gleichzeitig auftreten können.

Speziell für $n = 10$ ist die Wahrscheinlichkeit eines rechtwinkligen Dreiecks also $\frac{24}{100} = \frac{6}{25}$.

(c) Nach der Vorüberlegung entsteht bei festem A ein stumpfwinkliges Dreieck mit stumpfen Winkel beim nächsten Punkt gegen den Uhrzeigersinn entlang des Kreisbogens, wenn B und C in irgendeiner Reihenfolge auf dem Halbkreisbogen beginnend bei A gegen den Uhrzeigersinn liegen. Von je n Möglichkeiten gibt es für das zuerst gewählte B dafür $\frac{n+1}{2} - 1$ Möglichkeiten und $\frac{n+1}{2} - 2$ Möglichkeiten für das danach gewählte C, da die Punkte nicht aufeinander liegen sollen. Die Wahrscheinlichkeit eines stumpfwinkligen Dreiecks mit beliebigem stumpfen Winkel ist dreimal so hoch, da die

Ereignisse sich ausschließen, also insgesamt

$$3\frac{1}{n^2}\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\left(\frac{n+1}{2}-2\right).$$

Bemerkung: Für gerades n führt dieselbe Überlegung mit $\frac{n}{2}-1$ statt $\frac{n+1}{2}-1$ und $\frac{n}{2}-2$ statt $\frac{n+1}{2}-2$ Möglichkeiten auf die Wahrscheinlichkeit

$$3\frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right).$$

(d) Ein spitzwinkliges Dreieck erhält man, wenn man kein stumpfwinkliges, rechtwinkliges oder entartetes erhält. Die Wahrscheinlichkeit von stumpfwinkligen und rechtwinkligen sind aus den vorherigen Aufgabenteilen bekannt, also muss nur noch die Wahrscheinlichkeit für entartete bestimmt werden, um die des spitzwinkligen berechnen zu können.

Die Wahrscheinlichkeit eines entarteten Dreiecks ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$, dass A und B auf einem Punkt liegen, und jeweils derselben, dass C und A bzw. B auf einem Punkt landen. Diese Ereignisse schließen sich nicht aus, die Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n^2}$, dass A, B und C alle auf einem Punkt liegen, wurde in jedem der drei Ereignisse erfasst und muss beim Summieren doppelt abgezogen werden. Also ist die Wahrscheinlichkeit für ein entartetes Dreieck insgesamt

$$3\frac{1}{n}-2\frac{1}{n^2}=\frac{3n-2}{n^2}.$$

Man zieht also von der sicheren Wahrscheinlichkeit 1, ein Dreieck beliebigen Typs zu erhalten, die des stumpfwinkligen, rechtwinkligen und entarteten ab und erhält die Wahrscheinlichkeit des spitzwinkligen Dreiecks

$$\begin{aligned}&1-3\frac{1}{n^2}\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\left(\frac{n+1}{2}-2\right)-0-\frac{3n-2}{n^2}\\ =&\frac{1}{4n^2}\left(4n^2-3n^2+12n-9-12n+8\right)=\frac{n^2-1}{4n^2}.\end{aligned}$$

Alternative Lösung: Man kann die Wahrscheinlichkeit des spitzwinkligen Dreiecks auch direkt berechnen: Für ein ungerades n-Eck wird die Anzahl der Ereignisse mit einem spitzwinkligen Dreieck für alle Abstände bestimmt, die bereits gewählte Punkte A und B zueinander haben. Damit das Dreieck spitzwinklig ist, darf C laut Vorüberlegung weder auf einem Halbkreisbogen beginnend bei A in Richtung B, noch auf einem Halbkreisbogen beginnend bei B in Richtung A liegen.

Haben A und B Abstand 0, so kann kein spitzwinkliges Dreieck entstehen. Bei Abstand 1 liegt 1 Punkt zwischen den Enden der eben genannten Halbkreisbögen, es gibt also je ein Ergebnis mit A einen links von B und eins mit B einen links von A. Betrachtet man jeweils den um 1 erhöhten Abstand, gibt es eine mögliche Ecke für C mehr, bis der Abstand $\frac{n-1}{2}$ ist und es dabei $\frac{n-1}{2}$ Möglichkeiten für C gibt. Insgesamt gibt es also

$$\begin{aligned}
&0+1+1+2+2+\ldots+\left(\frac{n-1}{2}\right)+\left(\frac{n-1}{2}\right)\\
=&2\left(1+2+\ldots+\frac{n-1}{2}\right)=2\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}{2}\\
=&\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)=\frac{n^2-1}{4}
\end{aligned}$$

Ereignisse eines spitzwinkeligen Dreiecks. Für frei gewähltes A konnten B und C dabei noch je n Positionen einnehmen, also gibt es insgesamt n^2 Möglichkeiten unter denen die Ereignisse mit spitzwinkligem Dreieck gezählt wurden und die Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\frac{1}{n^2}\frac{n^2-1}{4}=\frac{n^2-1}{4n^2}\,,$$

was derselbe Ausdruck ist wie oben.

Bemerkung: Für gerade n erhält man mit denselben Überlegungen die Wahrscheinlichkeit für ein spitzwinkliges Dreieck unter Ausnutzung der bekannten Wahrscheinlichkeiten für stumpfwinklige, rechtwinklige und entartete Dreiecke

$$\begin{aligned}
&1-3\frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)-\frac{3(n-2)}{n^2}-\frac{3n-2}{n^2}\\
=&\frac{1}{4n^2}\left(4n^4-3n^2+12n+6n-24-12n+24-12n+8\right)=\frac{n^2-6n+8}{4n^2}
\end{aligned}$$

bzw. durch direktes Nachzählen

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{2}-2\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)\,,$$

da erst bei Abstand 2 jeweils eine Möglichkeit für ein spitzwinkliges Dreieck entsteht und die jeweils um 1 ansteigende Anzahl bei jeweils um 1 erhöhtem Abstand bis $\frac{n}{2}-2$ geht.

Schlussbemerkung: Betrachtet man den Grenzwert gegen ∞, also die Wahrscheinlichkeiten bei beliebiger Wahl der Dreieckspunkte auf dem Kreis, so erhält man $\frac{1}{4}$ für spitzwinklige, $\frac{3}{4}$ für stumpfwinklige und jeweils 0 für rechtwinklige bzw. entartete Dreiecke.

Lösung 4. Vorüberlegung: Schreibt man die n-stellige Zahl a zweimal hintereinander, so erhält man $x = 10^n \cdot a + a$ (nach den Regeln der schriftlichen Multiplikation).

(a) In jedem Fall ist $x = (10^n + 1) \cdot a$ durch die n-stellige Zahl $10^n + 1$ teilbar.

(b) Für $n = 3$ ist $10^n + 1 = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ durch 7 teilbar, also ist auch x in jedem Fall durch 7 teilbar.

Bemerkung: Die Aufgabe war zwar so nicht gedacht, aber es ist nicht ausgeschlossen, dass der einstellige Teiler von x je nach x verschieden sein darf. Deshalb gibt es auch die einfache Lösung:

Für $n = 1$ ist $x = 11 \cdot a$ in jedem Fall durch die einstellige Zahl a teilbar, welche nach Voraussetzung der Aufgabe auch $a > 1$ erfüllt.

(c) Da für n-stellige Zahlen a gilt $x = (10^n + 1)a = ka^2$ mit $k = \frac{x}{a^2}$, ist $ka = 10^n + 1$.

Wäre $k \geq 10$, so wäre für $a \geq 10^{n-1}+1$ dann $ka \geq 10 \cdot (10^{n-1} + 1) = 10^n + 10$, was im Widerspruch zu $ka = 10^n + 1$ steht. Auch für den eben ausgelassenen kleinstmöglichen Wert $a = 10^{n-1}$ kann $ka = 10^n + 1$ nicht erfüllt sein, also muss $k < 10$ sein.

Für $k = 1$ wäre ka nur n-stellig, $ka = 10^n + 1$ muss aber mindestens $n + 1$-stellig sein, also ist $k > 1$.

Da $10^n + 1$ Endziffer 1 hat, ist k nicht durch 2 oder 5 teilbar. Durch 3 teilbare Zahlen haben auch eine durch 3 teilbare Quersumme, $10^n + 1$ hat aber Quersumme 2, also ist k auch nicht durch 3 teilbar. Da k nicht durch 2 oder 3 teilbar ist, ist k auch nicht durch 4, 6, 8 oder 9 teilbar. Bleibt $k = 7$, durch welches $10^n + 1$ teilbar sein kann und zum Beispiel für $n = 3$ auch ist.

Wegen $1001 = 7 \cdot 143$ ist $143143 = 1001 \cdot 143$ durch 143^2 teilbar. Somit wird für $a = 143$ das einzig mögliche Verhältnis $k = \frac{x}{a^2} = 7$ auch angenommen.