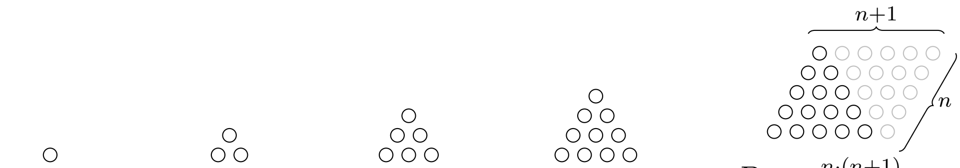
Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Tag der Mathematik
10. November 2012

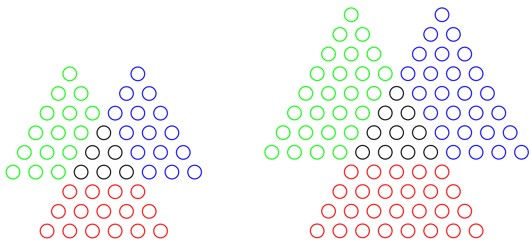
Klassenstufen 7, 8

Aufgabe 1 (4+4+6+4+2 Punkte)**.** Ihr kennt vermutlich schon Dreieckszahlen:



$D_1 = 1$ $D_2 = 3$ $D_3 = 6$ $D_4 = 10$ $D_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

Wir betrachten *Windmühlenzahlen*: Drei gleich große gleichseitige Dreiecke überschneiden sich in der Mitte in einem kleineren Dreieck. Die äußeren Dreiecke sollen doppelt so große Seitenlängen haben wie das kleinere. Wir legen die Dreiecke aus Kreisen, die wir zählen.



$W_1 = 7$ $W_2 = 24$ $W_3 = 51$ $W_4 = ?$

(a) Gebt die ersten 6 Windmühlenzahlen an.

(b) Berechnet jeweils die Differenzen aufeinanderfolgender Windmühlenzahlen. Was, vermutet ihr, gilt immer?

(c) Warum kann man die Windmühlenzahl W_n immer durch n teilen?

(d) Berechnet $\frac{W_1}{1}, \frac{W_2}{2}, \frac{W_3}{3}, \ldots, \frac{W_6}{6}$. Was vermutet ihr allgemein für $\frac{W_n}{n}$?

(e) Stellt mit der Vermutung aus dem vorherigen Teil eine Formel für W_n auf.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt).

- Begründet alle Aussagen, die ihr aufgestellt habt.
- Findet andere Herleitungen für die Formel für die Windmühlenzahlen W_n, zum Beispiel auch geometrische.

Aufgabe 2 (4+4+4+4+4 Punkte)**.** *Primzahlen* sind natürliche Zahlen größer als 1, die nur 1 und sich selbst als Teiler haben. Man kann zeigen: Ist eine Primzahl ein Teiler eines Produktes zweier natürlicher Zahlen, so ist sie auch Teiler einer der beiden Faktoren.

Jede natürliche Zahl größer 1 kann als Produkt von Primzahlen geschrieben werden. Dieses nennen wir *Primfaktorzerlegung.* Ordnen wir die Faktoren der Größe nach, ist die Primfaktorzerlegung eindeutig.

Unter den gemeinsamen Vielfachen von zwei (oder mehreren) Zahlen gibt es ein kleinstes: Wir nennen es also das *kleinste gemeinsame Vielfache* und kürzen es ab mit kgV.

Unter den gemeinsamen Teilern von zwei (oder mehreren) Zahlen gibt es einen größten: Wir nennen ihn also den *größten gemeinsamen Teiler* und kürzen ihn ab mit ggT.

Beispiel: Die Primfaktorzerlegungen $6 = 2 \cdot 3$ und $9 = 3 \cdot 3$ helfen, das kgV und den ggT dieser beiden Zahlen zu bestimmen:

$$\mathrm{kgV}(6,9) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18 \qquad \mathrm{ggT}(6,9) = 3$$

(a) Schreibt für jede Zahl die Primfaktorzerlegung auf und berechnet das kgV und den ggT für jedes Zahlenpaar sowie das Produkt aus kgV und ggT:

24 und 36	500 und 121
625 und 25	140 und 105

(b) Gebt die genaue Voraussetzung dafür an, dass das kgV von zwei Zahlen mit dem Produkt dieser Zahlen übereinstimmt. Begründet.

(c) Gebt die genaue Voraussetzung dafür an, dass der ggT von zwei Zahlen mit einer dieser Zahlen übereinstimmt. Begründet.

(d) Kann man für zwei Zahlen das Produkt aus deren kgV und ggT bestimmen, ohne vorher das kgV oder den ggT auszurechnen? Begründet.

(e) Berechnet die kleinste positive Zahl, die durch alle einstelligen Primzahlen teilbar ist.

Aufgabe 3 (6+2+2+3+2+2+3 Punkte)**.** Fußballturniere bestehen oftmals aus zwei Phasen. Zuerst findet eine *Gruppenphase* statt, in der jede Mannschaft einer Gruppe genau einmal gegen jede andere Mannschaft dieser Gruppe spielt. Hier gehen wir davon aus, dass alle Gruppen gleich groß sind und aus mindestens drei Mannschaften bestehen und dass am Ende der Gruppenphase immer ein eindeutiger Gruppensieger bestimmt wird. Nur die Gruppensieger spielen in der zweiten Phase, der sogenannten *K.-o.-Phase*, weiter. Die K.-o.-Phase besteht aus mehreren Runden. In jeder Runde trifft jeder Gruppensieger auf genau einen anderen Gruppensieger. Nur die Gewinner qualifizieren sich für die nächste Runde. In der letzten Runde, dem Finale, wird dann der Sieger des Turniers ermittelt.

Bei diesem einfachen Modell gibt es keine Freilose und auch keine weiteren Spiele um Platz 3 oder andere Platzierungen. Es soll aber erlaubt sein, dass gar keine Gruppenphase stattfindet. Auch kann die K.-o.-Phase entfallen, wenn der Sieger in einem Turnier mit nur einer Gruppe am Ende der Gruppenphase feststeht.

(a) Für Turniere mit 6, 7 oder 8 teilnehmenden Mannschaften:

- Bestimmt alle möglichen Gruppengrößen.
- Gebt an, falls ein Turnierverlauf ohne Gruppenphase möglich ist.
- Ermittelt für jeden möglichen Turnierplan die Anzahl aller Spiele und die Anzahl der Spiele, die der Gewinner spielt.

(b) Für welche Anzahlen von Mannschaften sind Turniere ohne Gruppenphase möglich?

(c) Für welche Anzahlen von Mannschaften sind nur Turniere ohne K.-o.-Phase möglich?

(d) Wie ermittelt man für eine gegebene Anzahl von Mannschaften den Turnierplan mit den wenigsten Spielen? (Begründet.)

Bei dem Brettspiel Halma können zwei oder drei Gegner gleichzeitig gegeneinander spielen. Bei der Hallenhalmaweltmeisterschaft sollen in der Gruppenphase immer nur zwei Gegner aufeinandertreffen, aber in der K.-o.-Phase besteht jede Runde entweder nur aus Spielen mit zwei oder nur aus Spielen mit drei Gegnern.

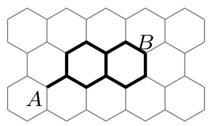
(e) Für welche Anzahlen von Teilnehmern sind solche Turniere ohne Gruppenphase möglich?

(f) Für welche Anzahlen von Teilnehmern sind nur solche Turniere ohne K.-o.-Phase möglich?

(g) Wie ermittelt man für eine gegebene Anzahl von Teilnehmern einen Turnierplan mit den wenigsten Spielen?

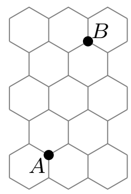
Aufgabe 4 (5+4+4+7 Punkte)**.** In Sechseckstadt verlaufen die Straßen entlang den Linien eines Sechseckgitters. *Punkte* sind die Gitterpunkte. Jeder Punkt hat drei Nachbarn, einen (schräg) *links*, einen (schräg) *rechts* und einen entweder *oben* oder *unten*, wobei wir die Richtungen mit „L", „R", „O" und „U" abkürzen wollen. Zu jedem Nachbarn ist der Abstand 1.

Pfade sind kürzeste Wege zwischen zwei Punkten, von denen es zu zwei Punkten mehrere geben kann. Die Länge eines Pfades gibt die *Entfernung* der Endpunkte an. Beispiel:



Vom Punkt A zum Punkt B gibt es 3 Pfade, einen RORRRR, einen RRRORR und einen RRRRRO. Sie haben jeweils die Länge 6, also ist 6 die Entfernung von A und B.

(a) Welche Entfernung haben A und B in folgendem Beispiel? Gebt alle Pfade von A nach B an.
(Ihr erhaltet Sechseckpapier zum Ausprobieren, das ihr auch für die Lösungen verwenden könnt.)



(b) Die Einwohner von Sechseckstadt sind sehr umweltbewusst. Daher müssen alle Ziele, die mit dem Auto angefahren werden, mindestens 4 Einheiten entfernt sein; ansonsten muss man zu Fuß gehen.

Markiert in einem Gitternetz einen Punkt A und tragt alle Punkte ein, die man von A aus zu Fuß erreichen muss.

(c) Ein (Sechseck-)Kreis sind die Punkte, die dieselbe Entfernung zu einem Mittelpunkt haben, also denselben (Sechseck-)Radius.

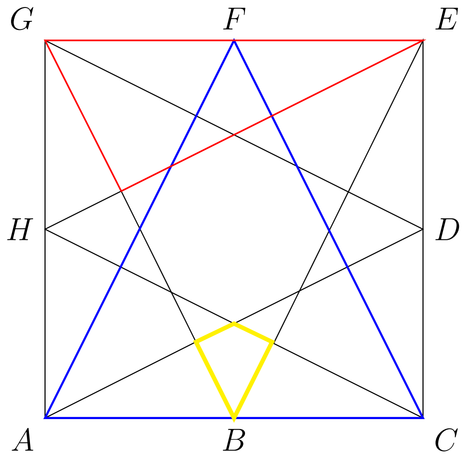
- Markiert jeweils den Mittelpunkt und jeweils die Punkte eines Kreises mit Radius 4 bzw. 7.
- Wie viele Punkte gehören zu einem Kreis mit Radius 4 bzw. 7? Wie ist es allgemein bei Radius n?

(d) Tragt in einem Kreis mit Radius 7 an jedem Punkt ein, wie viele Pfade vom Mittelpunkt zu dem jeweiligen Punkt führen. Benutzt dabei zwei Farben: jeweils eine für Punkte mit ungerader bzw. gerader Entfernung zum Mittelpunkt. (Für eine Lösung mit kleinerem Radius gibt es einen Teil der Punkte.)

Beschreibt (kurz) das Verfahren, die Anzahl der Pfade zu bestimmen.

Klassenstufen 9, 10

Aufgabe 1 (5+5+5+5 Punkte)**.** In der Abbildung ist ein Quadrat gezeigt, in dem ein regelmäßiger Stern liegt. Die Kantenlänge des Quadrats möge 1 betragen.



(a) Bestimmt den Flächeninhalt des Dreiecks mit den blauen Seiten.

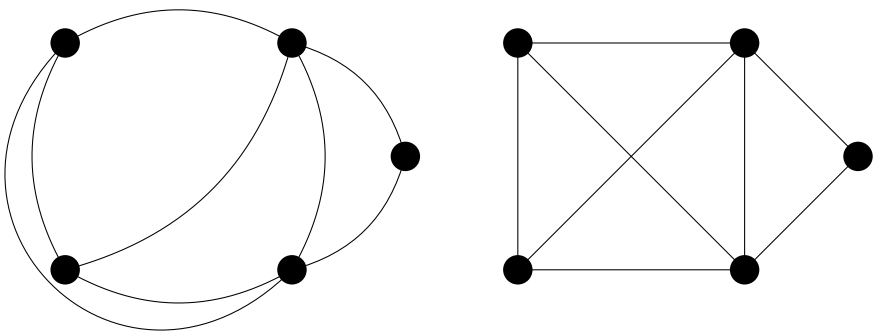
(b) Bestimmt den Flächeninhalt des Dreiecks mit den roten Seiten.

(c) Gebt ein Drachenviereck an, das mit dem blauen Dreieck flächengleich ist und das aus bereits eingezeichneten Linien besteht.

(d) Bestimmt den Flächeninhalt des gelben Drachenvierecks.

Aufgabe 2 (2+2+2+6+8 Punkte)**.** Ein n-Ecken-Graph besteht aus n Ecken (Punkten) und etlichen Kanten (Wegen), die je zwei Ecken verbinden.

In dieser Aufgabe betrachten wir nur zusammenhängende Graphen, das heißt, dass zwischen je zwei Ecken eine Verbindung über Kanten existieren muss.



Beispiel eines 5-Ecken-Graphen (zweimal derselbe), bei dem von zwei Ecken jeweils genau drei Kanten ausgehen, von zwei Ecken jeweils genau vier und von einer Ecke genau zwei.

(a) Zeichnet einen 7-Ecken-Graphen mit 12 Kanten, bei dem von sechs der Ecken jeweils genau drei Kanten ausgehen.

(b) Zeichnet einen 7-Ecken-Graphen mit 12 Kanten, bei dem von vier Ecken je drei Kanten ausgehen und von den anderen drei Ecken je vier Kanten.

(c) Zeichnet einen 7-Ecken-Graphen mit 12 Kanten, bei dem von drei Ecken je fünf Kanten ausgehen, von weiteren drei Ecken je zwei Kanten und von der siebenten Ecke genau drei Kanten.

(d)
- Welche minimale Zahl von Kanten hat ein 7-Ecken-Graph? Begründet!
- Welche minimale Zahl von Kanten hat ein n-Ecken-Graph? Begründet!

(e) Ein Kreis in einem Graphen ist ein „Rundweg“, also eine Abfolge verschiedener Kanten, bei der aufeinanderfolgende Kanten jeweils eine Ecke gemeinsam haben, wobei die letzte wieder mit der ersten eine Ecke gemeinsam hat; jede Ecke soll dabei nur einmal durchlaufen werden. (Ein Kreis braucht also mindestens drei Ecken und drei Kanten.)

- Zeichnet einen 7-Ecken-Graphen mit genau drei verschiedenen Kreisen und der minimalen Anzahl an verwendeten Kanten und begründet, warum nicht weniger Kanten verwendet werden können.
- Welches ist die minimale Zahl von Kanten eines n-Ecken-Graphs, der zwei Kreise enthält? Begründet!

Aufgabe 3 (5+5+5+5 Punkte)**.** Zwei Primzahlen, die eine Differenz von 2 aufweisen, nennt man einen Primzahlzwilling; Beispiele dafür sind 5 und 7 oder 29 und 31 oder 101 und 103.

Ein echter Primzahldrilling sind dann drei aufeinanderfolgende Primzahlen mit jeweils Abstand 2. (Wir wollen dies einen $(2,2)$-Drilling nennen.)

(a) Ein echter Primzahlfünfling wären fünf aufeinanderfolgende Primzahlen mit jeweils Abstand 2. Beweist, dass es keinen echten Primzahlfünfling gibt.

(b) Beweist, dass es nur einen echten Primzahldrilling gibt, und gebt ihn an.

(c) Nun kann man sich fragen, ob man weitere solche „Drillinge“ finden kann, wenn die Abstände nicht beide 2 sein müssen.

Wir fordern jetzt, dass von drei aufeinanderfolgenden Primzahlen die beiden Abstände, von der mittleren Primzahl aus gerechnet, einmal 2 und einmal 4 sein sollen; wir suchen also nach $(4,2)$-Drillingen bzw. $(2,4)$-Drillingen.

Gebt davon jeweils vier an.

(d) Beweist, dass es keine $(4,4)$-Drillinge gibt.

Aufgabe 4 (3+2+3+3+3+2+4 Punkte)**.** Hier geht es um quadratische Funktionen f_q mit $f_q(x) = -x \cdot (x - q)$. Beispielsweise gehören die Funktionen $f_1(x) = -x \cdot (x - 1)$, $f_{-2}(x) = -x \cdot (x + 2)$ und $f_\pi(x) = -x \cdot (x - \pi)$ zu diesem Typ.

(a) Welche Nullstellen haben f_1, f_2 und allgemein f_a?

(b) Gebt eine solche Funktion an, die eine Nullstelle bei $x = -5$ hat.

(c) Nun kann man zwei solche Funktionen auch addieren:

$$(f_a + f_b)(x) = f_a(x) + f_b(x) = -x \cdot (x - a) - x \cdot (x - b).$$

Gehört diese Summenfunktion auch zur Klasse der Funktionen f_q?

(d) Welche Nullstellen hat $f_1 + f_2$?

(e) Ermittelt die Funktion f_a, für die $f_1 + f_a$ eine Nullstelle bei $x = 4$ hat.

(f) Ermittelt die Funktion f_a, für die $f_2 + f_a$ nur eine Nullstelle bei $x = 0$ hat.

(g) Wie könnte man die Summe der beiden Funktionen so verändern, dass die Summenfunktion wieder vom Typ f_q ist?

Überprüft für euren Vorschlag, ob die Summe das Assoziativ- und das Kommutativgesetz erfüllt.

Oberstufe (11, 12, 13)

Aufgabe 1 (10+5+5 Punkte)**.** Wir betrachten die Multiplikationstabelle der natürlichen Zahlen. Aus dieser wählen wir einen rechteckigen Teilbereich mit ungerader Breite $b = 2k + 1$ und ungerader Höhe $h = 2\ell + 1$. Links oben in dem Rechteck steht das Produkt $x \cdot y$ und rechts unten $(x + 2k) \cdot (y + 2\ell)$. Wir betrachten nun den Rand des Rechtecks und färben diesen abwechselnd blau und rot ein, wobei das Feld $x \cdot y$ blau gefärbt wird. In diesem Beispiel ist $x = 3$, $y = 2$, $k = 2$ und $\ell = 1$:

$\cdot$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	1	2	3	4	5	6	7	8	...
2	2	4	6	8	10	12	14	16	...
3	3	6	9	12	15	18	21	24	...
4	4	8	12	16	20	24	28	32	...
5	5	10	15	20	25	30	35	40	...
...	...								

Wir bezeichnen mit B die Summe der Zahlen in den blauen Kästchen und mit R der Summe der Zahlen in den roten Kästchen.

(a) Zeigt, dass $B = R$ für $k = \ell = 1$ (also $b = h = 3$).
Welchen Wert nimmt B (bzw. R) für $k = \ell = 1$ an?

(b) Zeigt, dass allgemein $B = R$ für $k, \ell \geq 1$ beliebig.

(c) Welchen Wert nimmt B (bzw. R) für $k, \ell \geq 1$ an?

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Sei nun das ganze Rechteck schachbrettartig blau und rot gefärbt. Was kann nun über die Differenz der Summen der Zahlen in den blauen und in den roten Kästchen ausgesagt werden?

Aufgabe 2 (5+5+5+5 Punkte)**.** Für $n \geq 3$ ganzzahlige Gewichte soll gelten: Nimmt man ein beliebiges Gewicht weg, so kann man die restlichen so auf zwei Waagschalen verteilen, dass diese im Gleichgewicht sind.

(a) Gebt je eine Menge von Gewichten an, die diese Eigenschaft hat bzw. nicht hat.

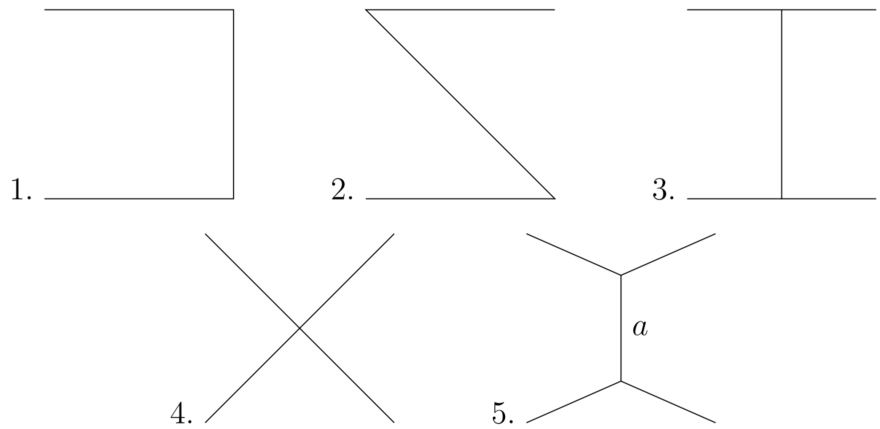
(b) Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gibt es eine solche Menge von Gewichten? (Beweist, dass es für diese Zahlen eine solche Menge gibt und für alle anderen nicht.)

(c) Gebt ein Beispiel solcher Gewichte an, bei dem mindestens zwei verschiedene Gewichte vorkommen. Für welche Zahlen $n \geq 3$ gibt es so ein Beispiel?

(d) Gebt ein Beispiel solcher Gewichte an, bei dem mindestens drei verschiedene Gewichte vorkommen. Für welche Zahlen $n \geq 3$ gibt es so ein Beispiel?

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Gibt es für jede natürliche Zahl n eine solche Menge mit mindestens n verschiedenen Gewichten?

Aufgabe 3 (10+10 Punkte)**.** Vier Orte auf den Ecken eines Quadrats der Kantenlänge 1 sollen so durch Straßen verbunden werden, dass man jeden Ort von jedem anderem aus erreichen kann. Zunächst betrachten wir die folgenden Konfigurationen:



Die Figuren 3, 4 und 5 sind jeweils horizontal und vertikal symmetrisch.

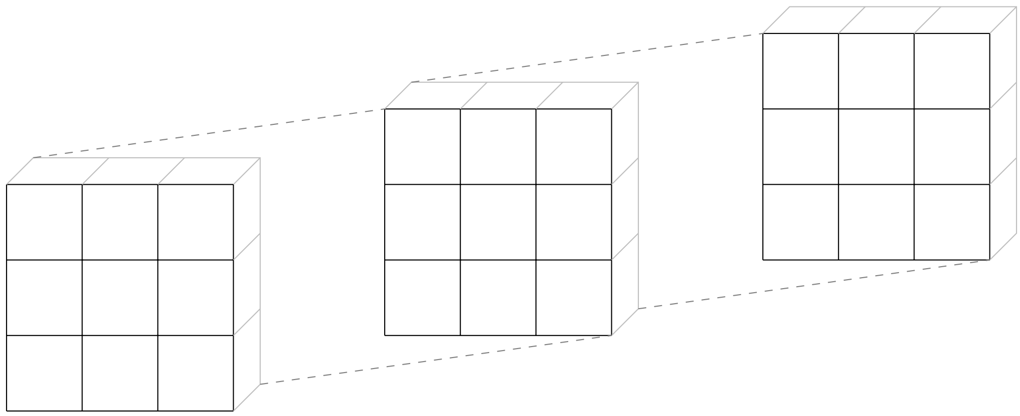
(a) Berechnet die Gesamtlänge der Straßennetze für jede Konfiguration (bei der fünften abhängig vom Parameter a).

(b) Welches Straßennetz hat die kürzeste Gesamtlänge?

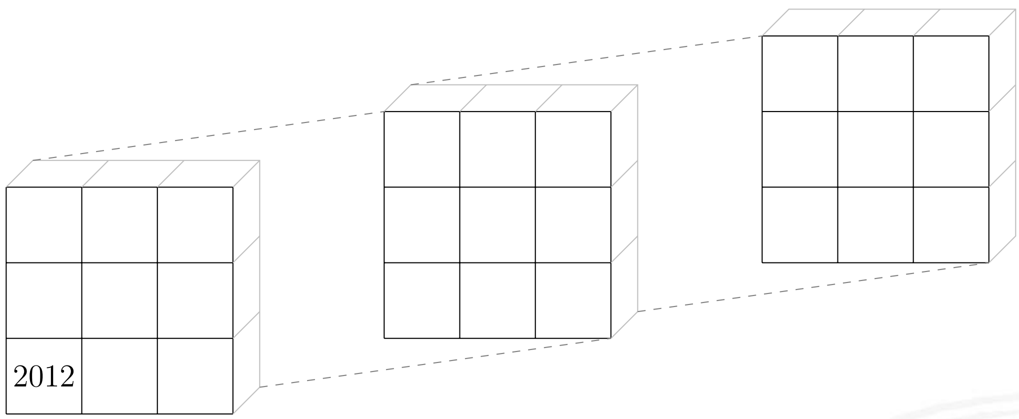
Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Kann es bei anderen Konfigurationen noch kürzere Straßennetze geben?

Aufgabe 4 (5+5+10 Punkte)**.** Ein Würfel der Kantenlänge n ist aus $n \times n \times n$ Einheitswürfeln aufgebaut. In jedem Einheitswürfel steht eine Zahl, so dass die Summe der Zahlen in jeder kantenparallelen Reihe 1 ergibt.

(a) Gebt ein Beispiel für $n = 3$ an, in dem nur die Zahlen 0 und 1 vorkommen.



(b) Gebt ein Beispiel für $n = 3$ an, bei dem in einer Ecke die Zahl 2012 steht.



(c) Wir betrachten nun einen Würfel mit Kantenlänge $n = 10$, bei dem in einer Ecke die Zahl 2012 steht. Berechne die Summe aller Zahlen der drei Würfelebenen, die diese Ecke enthalten.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Zeichnet für das Beispiel aus dem ersten Teil die 3×3 Kästchen der Würfelunterseite auf und tragt in jedes Kästchen die Höhe der Zahl 1 über der Unterseite ein. Welche Eigenschaften hat dieses Quadrat? Warum trifft das immer zu (für jeden $n \times n \times n$-Würfel mit Reihensumme 1, in dem nur die Zahlen 0 und 1 vorkommen)?

Lösungen 7, 8

Lösung 1. (a) $W_1 = 7$, $W_2 = 24$, $W_3 = 51$, $W_4 = 88$, $W_5 = 135$ und $W_6 = 192$.

(b) $W_2 - W_1 = 17$, $W_3 - W_2 = 27$, $W_4 - W_3 = 37$, $W_5 - W_4 = 47$ und $W_6 - W_5 = 57$. Vermutlich gilt $W_{n+1} - W_n = 10 \cdot n + 7$.

(c) Da die Dreieckszahl $D_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ ist, ist $2 \cdot D_n$ immer durch n teilbar. Die Windmühlenzahl W_n entsteht aus drei Dreiecken der Seitenlänge $2 \cdot n$ von denen noch zweimal ein Dreieck der Seitenlänge n abgezogen wird, weil sich drei überlappen. Die Dreieckszahl D_{2n} ist als die Hälfte eines Vielfachen von $2n$ durch n teilbar. Das Doppelte der Dreieckszahl D_n ist auch ein Vielfaches von n. Also lässt sich W_n als Summe von Vielfachen von n schreiben und ist daher selbst durch n teilbar.

Hinweis: Wenn man möchte, kann man dies auch als Formel schreiben:

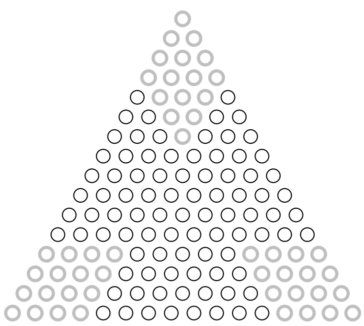
$$\begin{aligned} W_n = 3 \cdot D_{2 \cdot n} - 2 \cdot D_n &= 3 \cdot \frac{2 \cdot n \cdot (2 \cdot n + 1)}{2} - 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ &= 3 \cdot n \cdot (2 \cdot n + 1) - n \cdot (n+1) \end{aligned}$$

(d) $\frac{W_1}{1} = 7$, $\frac{W_2}{2} = 12$, $\frac{W_3}{3} = 17$, $\frac{W_4}{4} = 22$, $\frac{W_5}{5} = 27$ und $\frac{W_6}{6} = 32$. Vermutlich gilt $\frac{W_n}{n} = 5 \cdot n + 2$.

(e) Durch Multiplikation der vermuteten Gleichung mit n erhält man $W_n = n \cdot (5 \cdot n + 2)$.

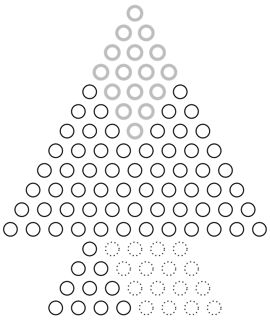
Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Wie im dritten Teil angedeutet, kann man die Windmühlenzahl W_n als drei Dreiecke doppelter Länge $D_{2 \cdot n}$ abzüglich zweier Dreiecke D_n aus der Überlappung bekommen:

$$\begin{aligned} W_n = 3 \cdot D_{2 \cdot n} - 2 \cdot D_n &= 3 \cdot n \cdot (2 \cdot n + 1) - n \cdot (n+1) \\ &= n \cdot (3 \cdot (2 \cdot n + 1) - (n+1)) \\ &= n \cdot (6 \cdot n + 3 - n - 1) = n \cdot (5 \cdot n + 2) \end{aligned}$$



Alternativ kann man in den drei Ecken der Windmühle W_n noch Rauten mit $n \cdot n$ Kreisen ergänzen, so dass man ein Dreieck der Seitenlänge $2 \cdot n + n + n$ erhält: $D_{4 \cdot n} = W_n + 3 \cdot n^2$. Daraus berechnet man:

$$\begin{aligned} W_n &= D_{4 \cdot n} - 3 \cdot n^2 \\ &= \frac{4 \cdot n \cdot (4 \cdot n + 1)}{2} - 3 \cdot n^2 \\ &= 8 \cdot n^2 + 2 \cdot n - 3 \cdot n^2 = n \cdot (5 \cdot n + 2) \end{aligned}$$



Eine weitere Alternative ist, einen Windmühlenflügel in eine Raute aus $n \cdot n$ Kreisen und ein Dreieck D_n zu zerlegen. Mit der Raute ergänzt man den Rest der Windmühle zu einem Dreieck der Seitenlänge $3 \cdot n$. Also berechnet man:

$$\begin{aligned} W_n &= D_{3\cdot n} + D_n \\ &= \frac{3 \cdot n \cdot (3 \cdot n + 1)}{2} + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{9 \cdot n^2 + 3 \cdot n + n^2 + n}{2} \\ &= \frac{10 \cdot n^2 + 4 \cdot n}{2} = n \cdot (5 \cdot n + 2) \end{aligned}$$

Mit der Formel $W_n = n \cdot (5 \cdot n + 2)$ kann man berechnen

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= (n+1) \cdot (5 \cdot (n+1) + 2) - n \cdot (5 \cdot n + 2) \\ &= (n+1) \cdot (5 \cdot n + 7) - n \cdot (5 \cdot n + 2) \\ &= 5 \cdot n^2 + 7 \cdot n + 5 \cdot n + 7 - 5 \cdot n^2 - 2 \cdot n = 10 \cdot n + 7. \end{aligned}$$

An der Formel für W_n sieht man zudem sofort, dass W_n durch n teilbar ist, es bleibt bei Division durch n nämlich $\frac{W_n}{n} = 5 \cdot n + 2$.

Lösung 2. (a) Mit $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ und $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ erhält man:

$$\mathrm{kgV}(24, 36) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72 \text{ und } \mathrm{ggT}(24, 36) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12,$$

also $\mathrm{kgV}(24, 36) \cdot \mathrm{ggT}(24, 36) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 864$.

Mit $500 = 2^2 \cdot 5^3$ und $121 = 11^2$ erhält man:

$$\mathrm{kgV}(500, 121) = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 11^2 = 60500 \text{ und } \mathrm{ggT}(500, 121) = 1,$$

also $\mathrm{kgV}(500, 121) \cdot \mathrm{ggT}(500, 121) = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 11^2 \cdot 1 = 60500$.

Mit $625 = 5^4$ und $25 = 5^2$ erhält man:

$$\mathrm{kgV}(625, 25) = 5^4 = 625 \text{ und } \mathrm{ggT}(625, 25) = 5^2 = 25,$$

also $\mathrm{kgV}(625, 25) \cdot \mathrm{ggT}(625, 25) = 5^6 = 15625$.

Mit $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$ und $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ erhält man:

$$\mathrm{kgV}(140, 105) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420 \text{ und } \mathrm{ggT}(140, 105) = 5 \cdot 7 = 35,$$

also $\mathrm{kgV}(140, 105) \cdot \mathrm{ggT}(140, 105) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 = 14700$.

(b) Das kgV von zwei Zahlen stimmt genau dann mit deren Produkt überein, wenn die Zahlen teilerfremd sind, also keine Primzahl in beiden Primfaktorzerlegungen vorkommt.

Begründung: Jeder Faktor der beiden Zahlen muss im kgV vorkommen. Gibt es keine gemeinsamen Faktoren, so ergibt sich genau das Produkt für das kgV. Ist umgekehrt das kgV das Produkt, so kann kein Primfaktor in beiden Zahlen vorkommen, da er sonst im kgV nur so häufig vorkommen würde, wie er maximal in beiden Zahlen vorkommt; im Produkt wäre es ja die Summe der Häufigkeiten, die größer ist als das Maximum.

(c) Das ggT zweier Zahlen stimmt genau dann mit einer von diesen überein, wenn eine Zahl durch die andere teilbar ist.

Begründung: Ist eine Zahl durch die andere teilbar, so sind natürlich beide Zahlen durch diese teilbar. Einen größeren gemeinsamen Teiler kann es auch nicht geben, da kein Teiler größer sein kann als die Zahl selbst. Stimmt umgekehrt der ggT mit einer der beiden Zahlen überein, so sind beide Zahlen durch diesen teilbar, also auch die eine Zahl durch die andere.

(d) Das Produkt von kgV und ggT zweier Zahlen ist einfach das Produkt dieser beider Zahlen, man muss weder kgV noch ggT dazu ausrechnen. Das liegt daran, dass im ggT genau die Faktoren stecken, die in beiden Zahlen vorkommen, während im kgV genau diese Faktoren nur einmal vorkommen neben allen Faktoren, die die Zahlen nicht gemeinsam haben. Im Produkt der beiden Zahlen kommen die gemeinsamen Faktoren doppelt vor neben allen Faktoren, die die Zahlen nicht gemeinsam haben, genau wie im Produkt von ggT und kgV.

(e) Die einstelligen Primzahlen sind 2, 3, 5 und 7. Da diese natürlich (paarweise) keine gemeinsamen Faktoren haben, ist das kgV genau das Produkt der Zahlen:

$$\mathrm{kgV}(2,3,5,7) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210.$$

Hinweis: Für alle Lösungen wurde vorausgesetzt, dass die Primfaktorzerlegung bei den natürlichen Zahlen bis auf die Reihenfolge eindeutig ist. Außerdem wurde auch benutzt, dass die *unzerlegbaren* Zahlen, also die natürlichen Zahlen größer 1, die nur 1 und sich selbst als Teiler haben, genau dieselben Zahlen sind, wie die mit der *Primeigenschaft*, dass sie ein Produkt genau dann teilen, wenn sie einen der Faktoren teilen. Diese beiden Behauptungen sind richtig, aber gar nicht so einfach zu beweisen. Interessierte sollten das unbedingt einmal probieren.

Lösung 3. (a) Im Folgenden sind die möglichen Gruppengrößen angegeben, wobei * für ein Turnier ohne Gruppenphase steht.

Mannschaften	Gruppengröße	K.-o.-Runden	Spiele des Siegers	Spiele
6	6	0	5	15
6	3	1	3	7
7	7	0	6	21
8	8	0	7	28
8	4	1	4	13
8	*	3	3	7

Nur bei 8 Mannschaften ist ein Turnier ohne Gruppenphase möglich.

(b) Da sich nur die Hälfte der Mannschaften für die nächste Runde qualifiziert, ist ein Spiel ohne Gruppenphase genau dann möglich, wenn man die Anzahl der Mannschaften solange durch 2 teilen kann, bis 1 übrig bleibt, also wenn sie eine Zweierpotenz ist.

(c) Für ungerade Anzahlen von Mannschaften muss auch die Anzahl der Gruppen ungerade sein. Dann können nicht jeweils zwei Gruppensieger gegeneinander spielen, also kann es keine K.-o.-phase geben. Für gerade Zahlen sind zumindest zwei Gruppen und ein Finalspiel zwischen beiden Gruppensiegern möglich.

(d) Im Folgenden werden Gruppengrößen von 1 oder 2 zugelassen, diese Turnierverläufe entsprechen dann einem Turnier ohne Gruppenphase.

In jedem Turnier mit n Mannschaften ist die Gruppengröße durch den größten ungeraden Teiler u von n teilbar, weil die Anzahl der Gruppen sonst ein Vielfaches einer von 1 verschiedenen ungeraden Zahl wäre und der Turniersieger aus den Gruppensiegern nicht in einer K.-o.-Phase ermittelt werden könnte. Da die Gruppengröße ein Teiler von n ist, ist sie also entweder gerade oder gleich u. Falls die Gruppengröße eine gerade Zahl ≥ 4 ist, erhält man ein Turnier mit weniger Spielen, indem man jede Gruppe in jeweils zwei Gruppen aufteilt und in einer zusätzlichen Runde der K.-o.-Phase jeweils die Gruppensieger der beiden Gruppen gegeneinander spielen lässt: In den größeren Gruppen musste jede Mannschaft gegen jede andere spielen, nun spielt keine Mannschaft mehr gegen jede andere der größeren Gruppe.

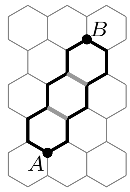
Daher muss die Gruppengröße in einem Turnier mit möglichst wenigen Spielen gleich u sein.

(e) Da die Anzahl der Mannschaften nach jeder K.-o.-Runde gedrittelt oder halbiert wird, ist genau dann ein Turnier ohne Gruppenphase möglich, wenn die Anzahl der Mannschaften durch keine Primzahl außer 2 und 3 teilbar ist. (Sie ist also ein Produkt einer Zweier- und einer Dreierpotenz. Die Anzahl der Runden, bei denen jeweils 2 bzw. 3 Spieler aufeinander treffen, entspricht der Zahl, wie häufig 2 bzw. 3 in der Primfaktorzerlegung auftritt. Die Reihenfolge der verschiedenen Typen von Runden kann frei gewählt werden.)

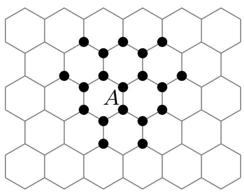
(f) Nur wenn die Anzahl der Mannschaften weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist, ist keine einzige K.-o.-Runde möglich.

(g) Als Gruppengröße wird der größte Teiler der Anzahl von Teilnehmern gewählt, der weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist. (Um ihn zu ermitteln, kann man zunächst so oft wie möglich durch 2 teilen, bis man den größten ungeraden Teiler erhält. Wenn man anschließend so oft wie möglich durch 3 teilt, erhält man am Ende die gesuchte Zahl). Die Anzahl der Gruppen ist dann durch keine Primzahl außer 2 und 3 teilbar, daher kann der Gruppensieger durch eine K.-o.-Phase ermittelt werden. (Dass man dabei die kleinstmögliche Anzahl von Spielen erhält, kann ähnlich wie bei den Fußballturnieren begründet werden.)

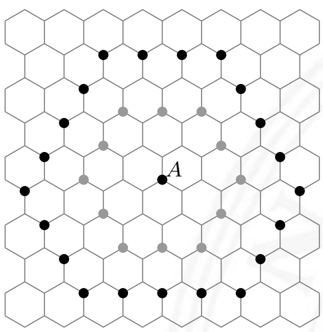
Lösung 4. (a) Man muss insgesamt dreimal RO bzw. OR gehen und einmal L, so dass 7 die Entfernung von A und B ist. Für L hat man vier Möglichkeiten: LOROROR, ROLOROR, ROROLOR und ROROROL.



(b) Es ergibt sich ein ausgefüllter Kreis mit Radius 3, da die Punkte ab der Entfernung 4 nicht mehr dazu gehören:

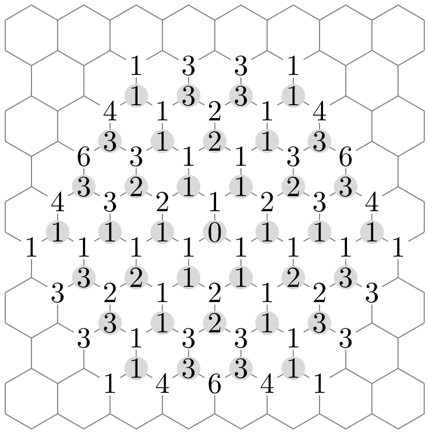


(c) Kreise mit Mittelpunkt A und Radius 4 bzw. 7:



Zum Kreis mit Radius 4 gehören 12 Punkte, zu dem mit Radius 7 gehören 21 Punkte. Zu einem Kreis mit Radius n gehören $3 \cdot n$ Punkte, es kommt nämlich immer abwechselnd bei 3 der 6 „Seiten“ des Kreises jeweils ein Punkt dazu.

(d) Man bestimmt nacheinander für die Kreise mit Radius 1, 2, . . . , 7, wie viele Pfade zu den Punkten führen. An jedem Punkt addiert man die Anzahlen aller Punkte des vorherigen Kreises, die einen Schritt von diesem Punkt entfernt sind:

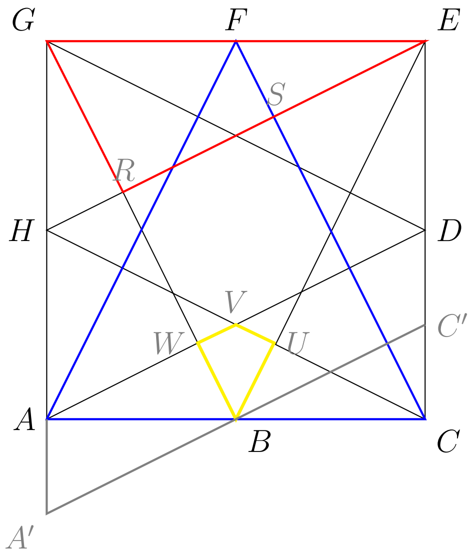


Hinweis: Man kann zwölf Anfänge von Pascal-Dreiecken erkennen, in jeder Farbe sechs und jeweils von den Linien aus 1en begrenzt. Mit dieser Beobachtung, die man allerdings noch begründen müsste, kann man relativ einfach für jeden beliebigen Punkt die Anzahl der Pfade dorthin berechnen.

Lösungen 9, 10

Lösung 1. (a) Im blauen Dreieck haben die Grundseite AC und die Höhe BF jeweils die Länge 1. Der Flächeninhalt beträgt somit $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

(b) Es sei R der Schnittpunkt von HE und GB und S der Schnittpunkt von HE mit FC:



Da GR und FS Parallelen sind und F der Mittelpunkt von GE ist, ist das Dreieck ΔFSE ähnlich zu ΔGRE und hat $\frac{1}{4}$ des Flächeninhalts. Das Dreieck ΔHRG ist kongruent zu ΔFSE, so dass es ebenfalls $\frac{1}{4}$ des Flächeninhalts von ΔGRE hat und damit $\frac{1}{5}$ des Flächeninhalts von ΔEGH. Mit der Grundseite GE mit Länge 1 und der Höhe GH mit Länge $\frac{1}{2}$ hat ΔEGH den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Das rote Dreieck ΔGRE hat $\frac{4}{5}$ dieses Flächeninhalts, also den Flächeninhalt $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$.

Alternativ: Es sei A' auf der Verlängerung von HA jenseits von A im Abstand $\frac{1}{4}$ zu A. Weiterhin sei C' der Mittelpunkt von CD, also im Abstand $\frac{1}{4}$ zu C.

Da AH und CD Parallelen sind, geht $A'C'$ durch den Mittelpunkt B von AC. Der Punkt H liegt auf $\frac{2}{5}$ der Strecke GA'. Da HE und $A'C'$ Parallelen sind, ist also auch der Schnittpunkt R von HE mit GB auf $\frac{2}{5}$ der Strecke GB nach Strahlensatz. Ebenfalls nach Strahlensatz hat dann auch die Höhe über der Grundseite EG im roten Dreieck ΔREG die Länge $\frac{2}{5}$.

Das rote Dreieck hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

(c) Das blaue Dreieck erhält man durch Entfernen der Dreiecke ΔAFG und ΔEFC vom Quadrat. Entfernt man stattdessen die Dreiecke ΔAFG und ΔCDA, so bleibt der Drachen $ADEF$, der flächengleich zum blauen Dreieck ΔACF ist, da ΔEFC und ΔCDA kongruent sind (aus Symmetriegründen).

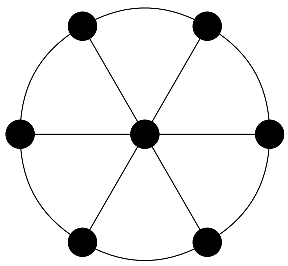
(d) Der Schnittpunkt V von AD und HC hat den Abstand $\frac{1}{4}$ zu AC, da AH und CD parallel sind und jeweils die Länge $\frac{1}{2}$ haben. Also hat das Dreieck ΔACV den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Die Dreiecke ΔBWA und ΔBUC sind kongruent zu ΔHRG, haben also auch $\frac{1}{4}$ des Flächeninhalts des roten Dreiecks ΔGRE, also den Flächeninhalt $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$. Zieht man diese vom Dreieck ΔACV ab, so bleibt für den gelben Drachen $BUVW$ der Flächeninhalt $\frac{1}{8} - \frac{1}{20} - \frac{1}{20} = \frac{5-2-2}{40} = \frac{1}{40}$.

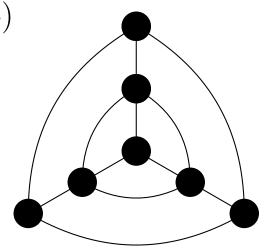
Alternativ: Der Schnittpunkt W von AD und GB liegt auf $\frac{2}{5}$ der Strecke AD, so wie R auf $\frac{2}{5}$ von GB liegt. Analog liegt auch der Schnittpunkt U von CH und EB auf $\frac{2}{5}$ der Strecke CH. Da V der Mittelpunkt von AD ist, liegt W also auf $\frac{4}{5}$ von AV und analog U auf $\frac{4}{5}$ von CV.

Das Dreieck ΔABW belegt also $\frac{4}{5}$ der Fläche von ΔABV, während ΔWBV davon $\frac{1}{5}$ belegt. ΔBUV belegt analog $\frac{1}{5}$ der Fläche von ΔBCV. Der gelbe Drachen $BUVW$ belegt also insgesamt auch $\frac{1}{5}$ der Fläche des Dreiecks ΔACV, hat also den Flächeninhalt $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{40}$.

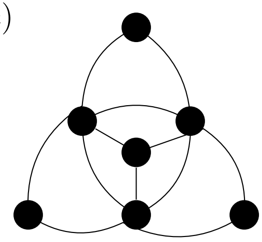
Lösung 2. (a)



(b)

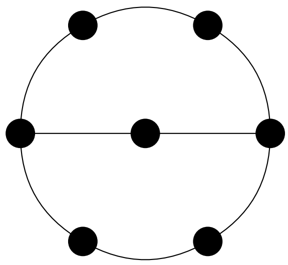


(c)



(d) Ein zusammenhängender 7-Ecken-Graph hat mindestens sechs Kanten. Baut man ihn dadurch auf, dass man beginnend mit einer Ecke jeweils eine Kante zu einem bestehenden zusammenhängenden Graphen hinzufügt, so kann man mit jeder Kante nur eine Ecke hinzubekommen.

Mit derselben Argumentation hat ein zusammenhängender n-Ecken-Graph mindestens $n-1$ Kanten.

(e) 

Dieser 7-Ecken-Graph hat genau drei Kreise, den „äußeren“, den „oberen“ und den „unteren“. Er besteht aus acht Kanten. Wenn man nacheinander jeweils eine Ecke verbindet, ohne dass ein Kreis entsteht, benötigt man sechs Kanten, damit der Graph zusammenhängend wird. Eine weitere Kante erzeugt den ersten Kreis, jedoch noch keinen zweiten: Da es zuvor keinen Kreis gab, muss jeder Kreis die neue Kante enthalten. Läge die neue Kante in zwei Kreisen, gäbe es aber auch einen Kreis, der nur aus anderen Kanten dieser beiden Kreise besteht. Erst die achte Kante kann daher den zweiten und dritten Kreis erzeugen.

Mit derselben Argumentation erhält man für einen n-Ecken-Graph mindestens $n + 1$ Kanten, damit er zwei Kreise enthält.

Lösung 3. (a) Da es nur eine gerade Primzahl gibt und entweder alle Zahlen des Primzahlfünflings gerade oder alle ungerade sein müssten, müsste ein Primzahlfünfling aus 5 ungeraden Zahlen bestehen. Unter fünf aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen kommt jeweils eine Zahl mit der Endziffer 1, 3, 5, 7 bzw. 9 vor. Da die Zahl mit der Endziffer 5 durch 5 teilbar ist, kann sie nur eine Primzahl sein, falls sie gleich 5 ist. Ein Primzahlfünfling müsste also die Zahl 5 enthalten. Da 3 die einzige ungerade Primzahl unter 5 ist, müssten zu einem Primzahlfünfling dann in jedem Fall auch die Zahlen 7, 9 und 11 gehören. Das ist nicht möglich, da 9 keine Primzahl ist.

(b) Für jede ganze Zahl n ist eine der Zahlen n, $n+2$ und $n+4$ durch 3 teilbar: Es ist klar, dass eine der Zahlen n, $n+1$ oder $n+2$ durch 3 teilbar ist und $n+4 = (n+1)+3$ ist genau dann durch 3 teilbar, wenn das für $n+1$ gilt. Ein Primzahldrilling muss also die Zahl 3 enthalten. Da 3 die kleinste ungerade Primzahl ist, gibt es nur den Primzahldrilling aus 3, 5 und 7.

(c) Die ersten fünf $(2, 4)$-Drillinge sind:

$$5,\ 7,\ 11; \qquad 11,\ 13,\ 17; \qquad 17,\ 19,\ 23; \qquad 41,\ 43,\ 47; \qquad 101, 103, 107.$$

Die ersten fünf $(4, 2)$-Drillinge sind:

$$7,\ 11,\ 13; \qquad 13,\ 17,\ 19; \qquad 37,\ 41,\ 43; \qquad 67,\ 71,\ 73; \qquad 97, 101, 103.$$

(Es reichen jeweils schon vier Beispiele.)

(d) Auch ein $(4, 4)$-Drilling müsste die Zahl 3 enthalten, denn für eine ganze Zahl n folgt aus $n + 4 = (n + 1) + 3$ und $n + 8 = (n + 2) + 6$, dass eine der

Zahlen n, $n+4$ und $n+8$ durch 3 teilbar ist. Als kleinste ungerade Primzahl müsste 3 die kleinste Zahl des $(4,4)$-Drillings sein, aber die nächste Primzahl nach 3 ist 5 und die Differenz von 5 und 3 ist 2. Also gibt es keine drei aufeinanderfolgenden Primzahlen, so dass benachbarte jeweils den Abstand 4 haben. Bemerkung: Es gibt aber drei Primzahlen, so dass die größte und die kleinste jeweils den Abstand 4 zur mittleren haben: 3, 7 und 11. Aus den obigen Überlegungen folgt, dass es genau eine Menge aus drei solchen Primzahlen gibt.

Lösung 4. (a) Da ein Produkt genau dann 0 ist, wenn einer der Faktoren 0 ist, gilt $f_a(x) = 0$ genau dann, wenn $-x = 0$ oder $x - a = 0$ ist. Also hat f_a die Nullstellen 0 und a. Insbesondere hat f_1 die Nullstellen 0 und 1 und f_2 die Nullstellen 0 und 2.

(b) f_{-5} hat die Nullstellen 0 und -5.

(c) Da

$$(f_a + f_b)(x) = -x \cdot (x - a) - x \cdot (x - b) = -2x^2 + (a + b)x$$

und für jede reelle Zahl c gilt

$$f_c(x) = -x \cdot (x - c) = -x^2 - cx,$$

zeigt ein Koeffizientenvergleich, dass für die Funktionen $f_a + f_b$ und f_c für kein c gleich sind. $f_a + f_b$ ist also keine Funktion von diesem Typ.

(d) Man faktorisiert

$$(f_1 + f_2)(x) = -2x^2 + (1 + 2)x = -2x(x - \frac{3}{2}),$$

also hat $f_1 + f_2$ die Nullstellen 0 und $\frac{3}{2}$.

(e) Da

$$(f_1 + f_a)(x) = -2x^2 + (1 + a)x = -2x(x - \frac{a+1}{2})$$

gilt, hat $(f_1 + f_a)$ die Nullstellen 0 und $\frac{a+1}{2}$. Die Funktion $(f_1 + f_a)$ hat daher genau dann eine Nullstelle bei $x = 4$, wenn

$$\frac{a+1}{2} = 4 \quad \text{bzw. äquivalent} \quad a + 1 = 8,$$

somit genau dann, wenn $a = 7$ gilt.

(f) Man faktorisiert

$$(f_2 + f_a)(x) = -2x^2 + (2 + a)x = -2x(x - \frac{a+2}{2}),$$

$f_2 + f_a$ hat also die Nullstellen 0 und $\frac{a+2}{2}$. Es gilt $\frac{a+2}{2} = 0$ für $a = -2$.

(g) Allgemein gilt

$$(f_a + f_b)(x) = -2x^2 + (a + b)x = -2x(x - \frac{a+b}{2}).$$

Statt $f_a + f_b$ könnte man die Funktion $\frac{f_a+f_b}{2}$ betrachten, wobei $\frac{f_a+f_b}{2}(x) = \frac{f_a(x)}{2} + \frac{f_b(x)}{2}$. Dann gilt

$$\frac{f_a + f_b}{2}(x) = -x(x - \frac{a+b}{2}) = f_{\frac{a+b}{2}}(x),$$

also ist $\frac{f_a+f_b}{2}$ eine Funktion vom Typ f_a.

Bemerkung: Da $f_a + f_b$ und $\frac{f_a+f_b}{2}$ die gleichen Nullstellen haben, folgt daraus, dass $f_a + f_b$ die Nullstellen 0 und $\frac{a+b}{2}$ hat.

Kommutativität ist natürlich erfüllt, da

$$\frac{f_a + f_b}{2}(x) = \frac{f_a(x)}{2} + \frac{f_b(x)}{2} = \frac{f_b(x)}{2} + \frac{f_a(x)}{2} = \frac{f_b + f_a}{2}(x).$$

Assoziativität dagegen ist nicht erfüllt, da

$$\frac{\frac{f_a+f_b}{2} + f_c}{2}(x) = \frac{f_a(x)}{4} + \frac{f_b(x)}{4} + \frac{f_c(x)}{2} \overset{i.\,A.}{\neq} \frac{f_a(x)}{2} + \frac{f_b(x)}{4} + \frac{f_c(x)}{4} = \frac{f_a + \frac{f_b+f_c}{2}}{2}(x).$$

Lösungen 11, 12, 13

Lösung 1. (a) Im Fall $b = h = 3$ stehen in der ersten Zeile des Rechtecks die Zahlen xy, $(x+1)y$ und $(x+2)y$, dabei ist das Feld mit $(x+1)y$ rot und die anderen beiden Felder sind blau. Die zweite Zeile hat zwei Randfelder, die beide rot gefärbt sind und die Zahlen $x(y+1)$ und $(x+2)(y+1)$ enthalten. Die dritte Zeile besteht aus zwei blauen Feldern mit den Zahlen $x(y+2)$ und $(x+2)(y+2)$ und einem roten Feld $(x+1)(y+2)$. Es gilt also

$$\begin{aligned} B &= xy + (x+2)y + x(y+2) + (x+2)(y+2) \\ &= 4xy + 4x + 4y + 4 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} R &= (x+1)y + x(y+1) + (x+2)(y+1) + (x+1)(y+2) \\ &= 4xy + 4x + 4y + 4. \end{aligned}$$

Also ist $B = R = 4(x+1)(y+1)$.

(b) Da die Kästchen am Rand des Rechtecks abwechselnd rot und blau gefärbt sind, gibt es gleich viele rote und blaue Kästchen. Es reicht also zu zeigen, dass der Mittelwert der Zahlen in den roten Kästchen mit dem Mittelwert der Zahlen in den blauen Kästchen übereinstimmt.

Der Mittelwert aller Zahlen in blauen bzw. roten Kästchen in der oberen Zeile des Rechtecks ist gleich der Zahl im mittleren Feld der oberen Zeile: Für jedes Kästchen der oberen Zeile links von dem mittleren Kästchen, gibt es rechts vom mittleren Kästchen ein anderes Kästchen gleicher Farbe, das genauso weit vom mittleren Kästchen entfernt liegt. Die Summe der Zahlen in den beiden Kästchen ist dann doppelt so groß wie die Zahl im mittleren Kästchen der oberen Zeile. Die Summe aller Zahlen in den Kästchen einer Farbe der oberen Reihe, würde sich also nicht verändern, wenn man jede Zahl durch die Zahl im mittleren Feld ersetzt.

Ebenso folgt, dass der Mittelwert aller Zahlen in den Kästchen von einer Farbe in der unteren Zeile gleich der Zahl im mittleren Kästchen der unteren Zeile ist. Da es jeweils gleich viele rote Felder in der oberen und unteren Zeile gibt, sind die Zahlen in roten Kästchen der oberen und unteren Zeile im Durchschnitt so groß, wie der Mittelwert zwischen der Zahl im mittleren Feld der unteren Zeile und der Zahl im mittleren Feld der oberen Zeile, also so groß wie Zahl in der Mitte des Rechtecks. Das gleiche gilt für die Zahlen in den blauen Kästchen der oberen und der unteren Zeile.

Noch nicht berücksichtigt sind die Zahlen in der rechten und linken Spalte außerhalb der Eckfelder. Für diese folgt analog wie zuvor, dass der Mittelwert aller Zahlen in roten bzw. blauen Kästchen der Zahl im mittleren Feld des Rechtecks entspricht. Somit entspricht der Durchschnitt der Zahlen in allen Kästchen einer Farbe jeweils der mittleren Zahl des Rechtecks.

(c) Nach den Überlegungen zur Lösung des letzten Aufgabenteils entspricht der Mittelwert aller Zahlen in blauen Kästchen der Zahl im mittleren Feld des Rechtecks, das ist $(x+k)(y+\ell)$. Um B zu bestimmen, muss $(x+k)(y+\ell)$ also nur mit der Anzahl der blauen Kästchen multipliziert werden. Der Rand besteht aus $4(k+\ell)$ Kästchen, von denen die Hälfte blau ist. Also gilt

$$B = 2(k+\ell)(x+k)(y+\ell).$$

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Mit ähnlichen Überlegungen wie zuvor kann man zeigen, dass für ein schachbrettartig gefärbtes Rechteck mit ungeraden Seitenlängen der Mittelwert aller Zahlen in den Feldern einer Farbe der Zahl im mittleren Feld des Rechtecks entspricht. Allerdings gibt es nicht gleich viele Felder von jeder Farbe: Wenn das Feld links oben wieder blau gefärbt ist, gibt es ein blaues Feld mehr als rote Felder. Somit ist B genau um die Zahl im mittleren Feld $(x+k)(y+\ell)$ größer als R.

Lösung 2. (a) Die beschriebene Eigenschaft wird zum Beispiel von einer Menge aus drei Gewichten erfüllt, die jeweils das Gewicht 1 haben: Nimmt man eins der Gewichte weg, dann bringt man die Waage ins Gleichgewicht, indem man auf beide Waagschalen jeweils eins der übrigen Gewichte legt.

Besteht die Menge hingegen aus den drei Gewichten 1, 2 und 3 und man nimmt das Gewicht 1 weg, so können die beiden anderen Gewichte nur in zwei Mengen mit den Gesamtgewichten 5 und 0 oder 2 und 3 aufgeteilt werden. Die Menge erfüllt also nicht diese Eigenschaft.

(b) Eine solche Menge aus n Gewichten gibt es genau dann, wenn n ungerade ist:

Falls n ungerade ist, hat jede Menge aus n gleich schweren Gewichten diese Eigenschaft. Wenn ein Gewicht weggenommen wurde, ist eine gerade Anzahl von gleich schweren Gewichten übrig, so dass man jeweils die Hälfte der Gewichte auf jede Waagschale legen kann.

Angenommen, es gäbe für eine gerade Zahl n eine solche Menge von n Gewichten mit dem Gesamtgewicht G. Wenn ein Gewicht a von dieser Menge entfernt wird, wiegen alle übrigen Gewichte zusammen $G-a$. Da man die restlichen Gewichte auf zwei gleich schwere Mengen aufteilen kann, muss $G-a$ eine gerade Zahl sein. Falls G ungerade ist, muss also auch a ungerade sein. Ebenso muss dann jedes andere Gewicht der Menge ungerade sein.

Dann ist G aber die Summe von einer geraden Anzahl von ungeraden Zahlen, also eine gerade Zahl. Somit kann G nicht ungerade sein. Falls G eine gerade Zahl ist, folgt entsprechend, dass jedes Gewicht gerade sein muss. In diesem Fall erhält man eine neue Menge von n positiven ganzzahligen Gewichten mit der beschriebenen Eigenschaft und dem Gesamtgewicht $\frac{G}{2}$, indem man jedes Gewicht durch ein halb so schweres Gewicht ersetzt. Falls $\frac{G}{2}$ eine gerade Zahl ist, kann man dieses Vorgehen wiederholen und erhält eine Menge mit Gesamtgewicht $\frac{G}{4}$, ist $\frac{G}{4}$ gerade, erhält man nach erneutem Ersetzen das Gesamtgewicht $\frac{G}{8}$ und so weiter. Man kann also so oft auf diese Weise die Gewichte ersetzen, bis man eine Menge aus n Gewichten mit ungeradem Gesamtgewicht und der beschriebenen Eigenschaft erhält. Da wir bereits gezeigt haben, dass es keine solche Menge geben kann, gibt es auch keine Menge von n Gewichten mit dieser Eigenschaft, deren Gesamtgewicht gerade ist.

(c) Für $n = 3$ gibt es keine solchen Beispiele, denn sonst könnte man ein Gewicht wegnehmen, so dass zwei verschiedene Gewichte übrig bleiben, mit diesen kann man aber kein Gleichgewicht herstellen.

Für jede ungerade Zahl $n \geq 5$ erfüllt zum Beispiel eine Menge aus $(n-1)$-mal dem Gewicht 1 und einmal dem Gewicht $n-2$ die Eigenschaft: Wird eins der Gewichte 1 entfernt, dann legt man das Gewicht $n-2$ auf eine Seite und die übrigen $n-2$ Gewichte 1 auf die andere Seite. Wird das Gewicht $n-2$ weggenommen, stellt man auf jede Seite gleich viele der übrigen Gewichte.

(d) Auch in diesem Fall gibt es für jede ungerade Zahl $n \geq 5$ eine solche Menge. Zum Beispiel hat die Menge aus einmal dem Gewicht 5, zweimal dem Gewicht 3 und $(n-3)$-mal dem Gewicht 1 diese Eigenschaft: Wird das Gewicht 5 weggenommen, so legt man auf jede Seite ein Gewicht 3 und die Hälfte der Gewichte 1. Falls ein Gewicht 3 entfernt wurde, legt man zunächst das Gewicht 5 auf eine Seite und auf die andere Seite die Gewichte 3, 1 und 1 und legt anschließend jeweils die Hälfte der übrigen Gewichte 1 dazu. Wenn ein Gewicht 1 weggelassen wird, legt man zunächst auf eine Seite die beiden Gewichte 3 und auf die andere Seite das Gewicht 5 und ein Gewicht 1 und fügt jeweils wieder die Hälfte der übrigen Gewichte 1 hinzu.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Es gilt sogar, dass jede beliebige Menge aus positiven ungeraden Gewichten zu einer Menge mit der beschriebenen Eigenschaft ergänzt werden kann: Wenn das Gesamtgewicht dieser Gewichte G beträgt, reicht es $(G+1)$-mal das Gewicht 1 hinzuzufügen. Wird ein Gewicht entfernt, so teilt man zunächst alle Gewichte, die schwerer als 1 sind, beliebig auf. Die Gesamtgewichte dieser beiden Mengen unterscheiden sich höchstens um G. Da noch mindestens G Gewichte 1 übrig sind, kann man zunächst zur leichteren Menge so viele der Gewichte 1 dazulegen, bis beide Mengen gleich schwer sind. Da alle Gewichte zusammen $2G+1$ wiegen und ein ungerades Gewicht weggenommen wurde, muss noch eine gerade Anzahl von Gewichten 1 übrig sein. Also kann man zu beiden Mengen gleich viele dazulegen.

Lösung 3. (a) Da die Diagonale im Quadrat die Länge $\sqrt{2}$ hat, hat das erste Netz die Länge 3, das zweite die Länge $2+\sqrt{2}$, das dritte die Länge 3 und das vierte die Länge $2\sqrt{2}$. Bleibt das fünfte: Die vier nicht mit a beschrifteten Längen kann man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen. Sie sind die Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke mit Kathetenlängen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1-a}{2}$, haben also die Länge

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1-a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2-2a+a^2}}{2}.$$

Das fünfte Straßennetz besteht aus vier solchen Strecken und einer der Länge a, hat also die Gesamtlänge

$$4\frac{\sqrt{2-2a+a^2}}{2}+a=2\sqrt{2-2a+a^2}+a.$$

(b) Um zu bestimmen, wann die Länge des fünften Netzes minimal ist, kann man sie als Funktion von a ableiten:

$$\left(2\sqrt{2-2a+a^2}+a\right)'=\frac{-2+2a}{\sqrt{2-2a+a^2}}+1=\frac{2a-2+\sqrt{2-2a+a^2}}{\sqrt{2-2a+a^2}}.$$

Die Ableitung hat eine Nullstelle, wenn $2a-2+\sqrt{2-2a+a^2}=0$ gilt und außerdem $2-2a+a^2>0$. Dies ist der Fall, wenn unter der Bedingung $2a-2\leq 0$ gilt

$$(2a-2)^2=2-2a+a^2,\ \text{also } 3a^2-6a+2=0.$$

Dies ist äquivalent zu $a^2-2a+1=1-\frac{2}{3}$, also $(a-1)^2=\frac{1}{3}$. Mögliche Lösungen sind also $a=1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Da $a\leq 1$ gelten muss, bleibt nur

$$a=1-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

was auch die erste Bedingung erfüllt.

Um zu überprüfen, dass $a=1-\frac{1}{\sqrt{3}}$ wirklich ein Minimum ist, muss man den Wert des Ausdrucks mit dem der Randfälle $a=0$ und $a=1$ vergleichen, die zugleich die dritte und vierte Konfiguration mit Längen 3 bzw. $2\sqrt{2}$ sind, wobei der zweite Wert kleiner ist. Es ist also die Frage, ob für die Längen L_4 und L_5 der Konfigurationen 4 bzw. 5 gilt

$$L_5 = 2\sqrt{2 - 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} < L_4 = 2\sqrt{2}.$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} L_5 =& 2\sqrt{2 - 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ =& 2\sqrt{2 - 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ =& 2\sqrt{\frac{4}{3}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1. \end{aligned}$$

Man vergleicht durch zweimaliges Quadrieren:

$$L_5 < L_4 \Leftrightarrow \sqrt{3} + 1 < 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{3} + 1 < 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} < 4 \Leftrightarrow 4 \cdot 3 < 16$$

Die kürzeste Konfiguration ist also wirklich die fünfte mit $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, welche die Länge $\sqrt{3} + 1$ hat.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Wir werden zeigen, dass die Konfiguration mit dem kürzesten Straßennetz vom Typ 5 bzw. Typ 5 um 90 Grad gedreht ist.

In dem Beweis benutzen wir die folgende Beobachtung: Unter allen Dreiecken mit fester Grundseite und Höhe hat das gleichschenklige den kürzesten Umfang und somit die kleinste Summe der Schenkellängen.

Diese Beobachtung kann man wie folgt beweisen. Sei $z = x + y$ die Länge der Grundseite und h die Höhe des Dreiecks, wobei die Höhensenkrechte die Grundseite in Strecken der Länge x und y teilt. Für die Summe S der Schenkellängen ergibt sich

$$S = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{y^2 + h^2}$$

und wir erhalten

$$S^2 = x^2 + h^2 + 2\sqrt{x^2y^2 + (x^2 + y^2)h^2 + h^4} + y^2 + h^2\,.$$

Da immer $(x - y)^2 \geq 0$ gilt und somit $x^2 + y^2 \geq 2xy$ folgt, können wir diese Ungleichung im mittleren Term in der Wurzel substituieren und es gilt

$$S^2 \geq x^2 + h^2 + 2\sqrt{x^2y^2 + 2xyh^2 + h^4} + y^2 + h^2 = x^2 + h^2 + 2(xy + h^2) + y^2 + h^2\,.$$

Dies können wir weiter umstellen, bis wir

$$S^2 \geq x^2 + 2xy + y^2 + 4h^2 = (x+y)^2 + 4h^2 = z^2 + 4h^2$$

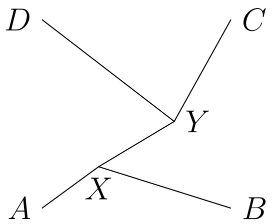
erhalten. D. h. die Summe der Schenkellängen ist immer mindestens $\sqrt{z^2 + 4h^2}$. Setzen wir auf der anderen Seite $x = y = z/2$, wie im gleichschenkligen Fall, dann gilt

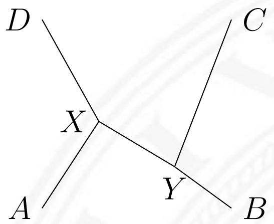
$$S^2 = \left(2\sqrt{z^2/4 + h^2}\right)^2 = z^2 + 4h^2\,,$$

d. h. in diesem Fall wird die untere Schranke angenommen und somit minimiert das gleichschenklige Dreieck die Summe der Schenkellängen und die Beobachtung ist bewiesen.

Sei nun ein kürzestes Straßennetz gegeben. Streng genommen müsste man erst einmal zeigen, dass ein solches Netzwerk überhaupt existiert. Dafür müssten wir aber genauer spezifizieren, wie wir ein Straßennetzwerk mathematisch modellieren. Tatsächlich gibt es aber ein solches Netzwerk minimaler Länge, falls die Straßen hinreichend „stetig“ sind. Für so ein Straßennetzwerk minimaler Länge können wir annehmen, dass alle Straßen innerhalb bzw. auf dem Rand des Quadrats verlaufen, da wir sonst über den Rand Abkürzungen finden würden. Nun betrachten wir die beiden Wege in dem Straßennetz, welche diagonal gegenüberliegende Orte miteinander verbinden (A mit C und B mit D in der Graphik weiter unten). Es scheint offensichtlich, dass sich diese Wege irgendwann einmal kreuzen müssen und dies wollen wir hier einfach annehmen. (Tatsächlich ist ein mathematischer Beweis dieser Tatsache gar nicht so einfach und beruht auf dem Jordan'schen Kurvensatz.)

Man sieht leicht ein, dass diese beiden Diagonalwege sich nur einmal kreuzen. D. h. die Wege treffen sich, verlaufen dann eventuell ein Stück gemeinsam, und trennen sich dann wieder. Sollten sie sich nämlich mehr als einmal kreuzen, dann könnte man über die direkte Verbindung des ersten und letzten Kreuzungspunktes ein kürzeres Straßennetzwerk bekommen. Da die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten die gerade Linie ist, können wir weiter annehmen, dass alle Zwischenstücke gerade Strecken sind. Auf diese Weise erhalten wir eine der folgenden Strukturen für das Straßennetzwerk:

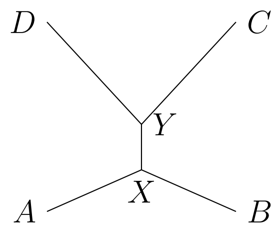




Sollte das Straßennetzwerk die Form wie im linken Bild haben, dann werden wir weiter zeigen, dass es die Struktur von Typ 5 haben muss. Im anderen Fall würde mit der gleichen Argumentation ein Straßennetzwerk von Typ 5 um 90 Grad gedreht herauskommen.

Als nächstes benutzen wir die oben gemachte Beobachtung. Mit Hilfe dieser können wir zeigen, dass die beiden Punkte X und Y übereinander auf der Mittelachsen liegen müssen. Sollte dies nicht der Fall sein, dann verkürzen sich durch das Verschieben dorthin die Summe der Schenkellängen AX und BX und der von CY und DY. Da X und Y dabei nicht in de Höhe verschoben werden, ist die Distanz XY am kürzesten, wenn X und Y genau übereinander liegen.

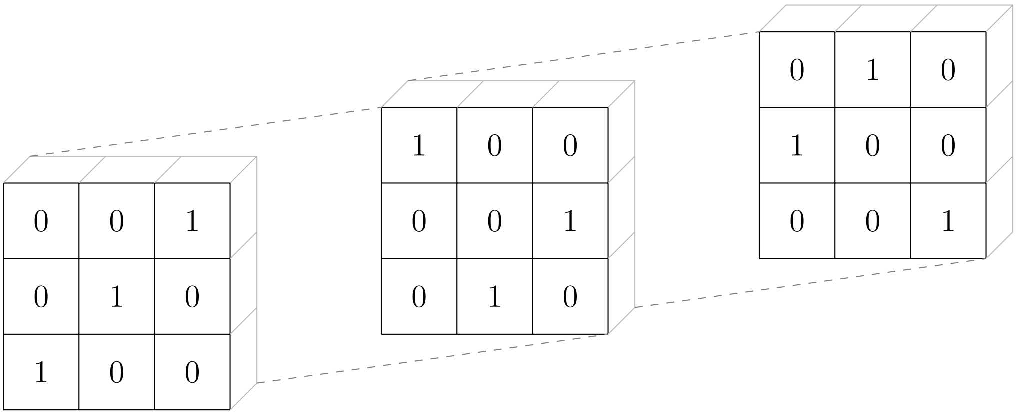
Damit haben wir ein Straßennetzwerk der Form



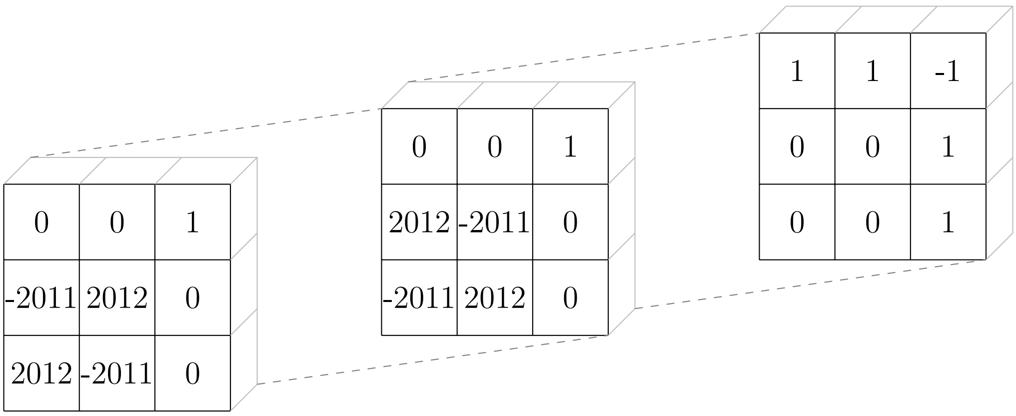
erzwungen und es bleibt nur noch zu zeigen, dass es auch horizontal symmetrisch sein muss. (Wenn Y unter X wäre, könnte das Netz durch Vertauschen von X und Y verkürzt werden.) Dafür verwenden wir ein weiteres Mal die Beobachtung von oben. Die Trapeze mit den Eckpunkten $BCYX$ und $AXYD$ sind gleich und die Gesamtlänge des Straßennetzwerkes entspricht zweimal dem Trapezumfang minus die Länge von XY minus zwei (die Strecke XY kommt nur einmal vor und die Seiten AD und BC gar nicht). D. h. wenn wir den Umfang des Trapezes bei fester Länge XY durch verschieben von X und Y verkürzen können, dann bekämen wir ein kürzeres Straßennetzwerk. Nun folgt aus der Beobachtung, dass die Summe der Längen XB und YC minimal ist, wenn die Winkel $\angle XBC$ und $\angle BCY$ gleich groß sind. Man stelle sich kurz das Dreieck mit Höhe $\frac{1}{2}$ vor, welches man erhält, wenn man einen horizontalen Streifen der Breite XY herausschneidet, so dass dann X und Y auf einen Punkt Z gegenüber der verkürzten Grundseite „BC" zusammenfallen. Für diese Dreieck besagt die Beobachtung, dass die Summe der Längen BZ und CZ minimal ist, wenn das Dreieck ZBC gleichschenklig ist. Dies entspricht dann aber einem symmetrischen Trapez $BCYX$. Somit folgt, dass es ein horizontal symmetrisches Netzwerk vom Typ 5 gibt, welches die kürzeste Gesamtlänge hat.

Bemerkung: Die Winkel an den Punkten X und Y betragen im kürzesten Streckennetz alle 120°. Das hängt mit einem bekannten Satz über minimale Netze in Dreiecken zusammen: Sind alle Innenwinkel des Dreiecks kleiner als 120°, so gibt es genau ein minimales Netz zwischen den Eckpunkten, das aus den Verbindungsstrecken der Ecken mit dem sogenannten *Fermat-Torricelli-Punkt* besteht, und die Winkel dazwischen sind alle 120° groß. Mit diesem Satz kann man ohne Rechnung allein aus der ersten Überlegung zur Grundstruktur des Streckennetzes die beiden kürzesten bestimmen.

Lösung 4. (a) Eine Möglichkeit ist:



(b) Eine Möglichkeit ist:



(c) Jede der drei Würfelebenen besteht aus 10 kantenparallelen Reihen, daher beträgt die Summe aller Zahlen in einer Würfelebene jeweils 10. Die Summe dieser drei Summen ist 30, darin kommen die Zahlen einiger Würfel mehrfach vor: Der Eckwürfel mit der 2012 liegt in allen drei Würfelebenen. Die anderen Würfel der drei Reihen, die diesen Eckwürfel enthalten, liegen jeweils in zwei der drei Würfelebenen. Da die Summe in jeder Reihe 1 beträgt, ist die Summe dieser Würfel gleich $3 \cdot (-2011) = -6033$. Alle anderen Würfel liegen in höchstens einer Würfelebene. Da $30 - 2 \cdot 2012 - (-6033) = 2039$ gilt, ist die Summe aller Zahlen in den drei Würfelebenen 2039.

Zusatzteil (falls noch Zeit bleibt). Für die hier angegebene Lösung ergibt sich das folgende Quadrat:

2	3	1
3	1	2
1	2	3

Jede der Zahlen 1 bis 3 tritt in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal auf. Entsprechend muss für jedes Quadrat für einen solchen $n \times n \times n$-Würfel gelten, dass jede der Zahlen 1 bis n in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal auftritt (solche Quadrate werden auch *lateinische Quadrate* genannt): Das bedeutet nichts Anderes, als dass in jeder der Höhen 1 bis n in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal eine 1 steht. Umgekehrt beschreibt jedes lateinische Quadrat einen $n \times n \times n$-Würfel mit Reihensumme 1 und nur den Einträgen 1 und 0: Trägt man für jedes Kästchen eine 1 in der angegebenen Höhe über dem Kästchen ein, so enthält jede vertikale Reihe genau eine 1 (nämlich nur in der angegebenen Höhe) und das gleiche gilt für alle horizontalen Zeilen und Spalten.