M Mittelstufe

Aufgabe 1 (4 P.)**.** Jeder von 10 identischen Krügen enthält etwas Milch, jedoch nicht mehr als 10 Prozent seines Fassungsvermögens. Nun darf man einen Krug auswählen und eine beliebige Menge seiner Milch gleichmäßig auf die anderen Krüge verteilen, danach wiederholt man diesen Vorgang mit einem anderen Krug und so weiter. Beweise, dass man durch höchstens 10 solche Vorgänge erreichen kann, dass alle Krüge gleich viel Milch enthalten.

Aufgabe 2 (6 P.)**.** Mike hat 1000 identische Würfel. Bei jedem Würfel sind je zwei gegenüber liegende Seiten rot, blau und weiß gefärbt. Mike setzt sie so zu einem großen Würfel ($10 \times 10 \times 10$) zusammen, dass sich zwei benachbarte Würfel immer mit Seiten gleicher Farbe berühren. Zeige, dass es eine Seite des großen Würfels gibt, die vollständig in einer der drei Farben gefärbt ist.

Aufgabe 3 (6 P.)**.** Bestimme alle positiven ganzen Zahlen a und b, für die der Ausdruck $(a + b^2)(b + a^2)$ eine Zweierpotenz ist (also von der Form 2^m für eine ganze Zahl m).

Aufgabe 4 (6 P.)**.** Sei $ABCD$ eine Raute. Es werden nun ein Punkt P auf der Seite BC und ein Punkt Q auf der Seite CD gewählt, so dass $|BP| = |CQ|$. Zeige, dass der Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle APQ$ immer auf der Diagonalen BD liegt.

Aufgabe 5. Gegeben sind N Gewichte von 1 Gramm, 2 Gramm, $\ldots$, N Gramm (jedes Gewicht kommt genau einmal vor). Man soll nun einige von ihnen (mehr als eines) auswählen, deren Gesamtgewicht gleich dem Durchschnittsgewicht der restlichen Gewichte ist. Zeige,

(a) (2 P.) dass diese Aufgabe immer erfüllt werden kann, falls $N + 1$ eine Quadratzahl ist, und

(b) (7 P.) dass umgekehrt $N+1$ immer eine Quadratzahl ist, falls die Aufgabe erfüllt werden kann.

Aufgabe 6 (10 P.)**.** Auf einem Gitter werden 2009 identische Quadrate derart verteilt, dass ihre Kanten auf den Gitterlinien liegen. Die Quadrate dürfen sich hierbei überlappen. Nun markiert man jedes Gitterkästchen, dass von einer ungeraden Zahl von Quadraten bedeckt wird. Zeige, dass die Zahl der markierten Kästchen mindestens so groß ist wie die Zahl der Kästchen, die ein einzelnes Quadrat überdeckt.

Aufgabe 7 (14 P.)**.** Olga und Max reisen zu einer Inselgruppe, die aus 2009 Inseln besteht. Zwischen einigen dieser Inseln gibt es Bootsrouten (die Boote fahren dabei in beide Richtungen). Olga und Max spielen auf ihrer Fahrt folgendes Spiel: Olga sucht sich aus, auf welcher Insel sie ihre Reise beginnen. Von nun an reisen sie nur über die vorhandenen Bootsrouten, wobei sie sich abwechselnd aussuchen, zu welcher Insel sie als nächstes reisen. Dabei darf keine Insel mehrfach besucht werden. Max darf zuerst wählen. Wer keine Insel mehr wählen kann (weil alle über eine Bootsroute direkt erreichbaren Inseln bereits besucht wurden), verliert. Zeige, dass Olga bei jeder Verteilung von Bootsrouten so spielen kann, dass sie gewinnt (unabhängig davon wie Max spielt).

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (4 P.). 100 Piraten spielen Karten. Am Ende des Spiels müssen sie einander mit Goldstaub bezahlen. Jeder Pirat hat genug Goldstaub, um seine Schulden zu bezahlen. Ein Bezahlvorgang funktioniert nun so, dass einer der Piraten entweder an alle anderen Piraten gleich viel Goldstaub verteilt oder von allen anderen gleich viel Goldstaub nimmt. Zeige, dass man immer durch einige solche Vorgänge erreichen kann, dass am Ende jeder Gewinner genau seinen Gewinn erhalten und jeder Verlierer genau seine Schulden bezahlt hat.

Aufgabe 2 (6 P.). Ein Rechteck (welches kein Quadrat ist) sei in N rechteckige (nicht notwendig kongruente) Stücke zerteilt. Zeige, dass man nun alle N Stücke in je 2 Teile zerschneiden und aus den entstandenen $2N$ Teilen ein Quadrat und ein Rechteck zusammen legen kann, wobei beide aus genau N Teilen bestehen.

Aufgabe 3 (7 P.). Es seien ein (nicht notwenig regelmäßiges) Tetraeder und eine Kugel gegeben, so dass die Kugel jede Kante des Tetraeders berührt (aber nicht schneidet). Für je zwei gegenüber liegende Kanten des Tetraeders verbinden wir die Berührpunkte mit der Kugel durch eine Linie. Zeige, dass sich diese drei Linien in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 4 (9 P.). Mit $[n]!$ bezeichnen wir das Produkt $1 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n \text{ Stellen}}$. Zeige, dass $[n+m]!$ immer durch $[n]! \cdot [m]!$ teilbar ist.

Aufgabe 5 (9 P.). Bei einem Dreieck $\triangle XYZ$ und einem konvexen Sechseck $ABCDEF$ seien die Seiten AB und XY parallel und gleich lang, ebenso für die Seiten CD und YZ sowie für EF und ZX. Zeige, dass der Flächeninhalt desjenigen Dreiecks, welches von den Mittelpunkten der Seiten BC, DE und FA gebildet wird, nicht kleiner ist als der des Dreiecks XYZ.

Aufgabe 6 (12 P.). Olga und Max reisen zu einer Inselgruppe, die aus 2009 Inseln besteht. Zwischen einigen dieser Inseln gibt es Bootsrouten (die Boote fahren dabei in beide Richtungen). Olga und Max spielen auf ihrer Fahrt folgendes Spiel: Olga sucht sich aus, auf welcher Insel sie ihre Reise beginnen. Von nun an reisen sie nur über die vorhandenen Bootsrouten, wobei sie sich abwechselnd aussuchen, zu welcher Insel sie als nächstes reisen. Dabei darf keine Insel mehrfach besucht werden. Max darf zuerst wählen. Wer keine Insel mehr wählen kann (weil alle über eine Bootsroute direkt erreichbaren Inseln bereits besucht wurden), verliert. Zeige, dass Olga bei jeder Verteilung von Bootsrouten so spielen kann, dass sie gewinnt (unabhängig davon wie Max spielt).

Aufgabe 7 (14 P.). Der Eingang einer Höhle wird durch einen drehbaren Tisch versperrt, auf dem N gleich aussehende verschlossene Fässer in gleichen Abständen im Kreis angeordnet sind. Jedes Fass enthält einen Hering, dessen Kopf nach oben oder nach unten deutet. Nun darf Ali Baba einige dieser Fässer (mindestens eines) auswählen und umdrehen. Dann wird der Tisch gedreht, so dass man nicht mehr erkennen kann, welche Fässer zuvor umgedreht wurden. Ali Baba darf nun erneut wählen und so weiter. Der Eingang öffnet sich, sobald die Köpfe aller N Heringe in die gleiche Richtung deuten. Bestimme alle N, für die Ali Baba den Eingang in jedem Fall öffnen kann (in endlich vielen Versuchen).

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. Viel Erfolg!