M Mittelstufe

Aufgabe 1 (4 P.). Auf einem 100×100-Schachbrett sind 100 Damen so platziert, dass keine eine andere bedroht. Beweise, dass in jedem der vier 50×50-Teile des Bretts, die in den Ecken liegen, mindestens eine Dame ist. (Bemerkung: Eine Dame bedroht eine andere, wenn sie in derselben Zeile, Spalte oder auf derselben Diagonalen steht.)

Aufgabe 2 (6 P.). Von vier Steinen ist bekannt, dass ihr Gewicht in Gramm ganzzahlig ist. Eine Waage zeigt die Differenz der Gewichte auf der linken und rechten Seite an. Kann man mit vier Wägungen das Gewicht aller Steine herausfinden, wenn die Waage dabei höchstens einmal einen Fehler von einem Gramm macht?

Aufgabe 3 (6 P.). Serge teilt Elias die Länge der Seitenhalbierenden AD und der Seite AC eines Dreiecks ΔABC mit. Mit diesen Angaben kann Elias beweisen, dass $\angle BAC$ stumpf ist und $\angle BAD$ spitz. Bestimme das Verhältnis $\frac{|AD|}{|AC|}$ (und zeige Elias' Behauptung für jedes Dreieck mit diesem Verhältnis).

Aufgabe 4 (6 P.). Baron Münchhausen behauptet, dass er eine Karte des Landes Oz besitzt, die folgende Eigenschaften hat: Es gibt fünf Städte und jeweils zwei von ihnen sind durch eine Straße verbunden, die nicht durch andere Städte verläuft. Jede dieser Straßen schneidet höchstens eine andere Straße (und nicht mehrfach). Die Straßen auf der Karte sind entweder gelb oder rot. Wenn man nun um eine Stadt (entlang ihrer Grenze) herum geht, wechseln sich die Farben der überquerten Straßen ab. Kann diese Behauptung wahr sein?

Aufgabe 5 (8 P.). Es seinen $a_1, \ldots, a_n$ positive Zahlen mit $a_1+a_2+\cdots+a_n \leq \frac{1}{2}$. Beweise $(1+a_1) \cdot (1+a_2) \cdot \cdots \cdot (1+a_n) < 2$.

Aufgabe 6 (9 P.). Das Dreieck ΔABC sei nicht gleichschenklig. AC und BC seien Grundseiten der gleichschenkligen Dreiecke $\Delta ACB'$ und $\Delta CBA'$, die jeweils außerhalb von ΔABC liegen und den gleichen Winkel φ an der Grundseite haben. Der Schnittpunkt der Senkrechten auf $A'B'$ durch C mit der Mittelsenkrechten von AB heiße C_1. Bestimme den Winkel $\angle BC_1A$.

Aufgabe 7. Die unendliche Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sei wie folgt gegeben: $a_1 = 1$ und für $n > 1$ sei $a_n = a_{n-1} + 1$, wenn der größte ungerade Teiler von n den Rest 1 bei der Division durch 4 lässt, und $a_n = a_{n-1} - 1$, wenn dieser Rest 3 ist. Beweise, dass in dieser Folge

(a) (5 P.) die Zahl 1 unendlich oft vorkommt und

(b) (5 P.) jede positive ganze Zahl unendlich oft vorkommt.

(Bemerkung: Der Anfang der Folge ist 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, ...)

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden. — Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (4 P.)**.** Ein quadratisches Brett ist durch jeweils sieben Linien parallel zu den Seiten in 64 rechteckige Felder aufgeteilt, die wie ein Schachbrett gefärbt sind. Die Felder können unterschiedlich groß sein, allerdings ist das Verhältnis der Fläche irgendeines weißen Feldes zu der irgendeines schwarzen Feldes nie größer als 2. Ermittle das maximal mögliche Verhältnis der Gesamtfläche aller weißen Felder zur Gesamtfläche aller schwarzen Felder.

Aufgabe 2 (6 P.)**.** Der (dreidimensionale) Raum wird in nicht-überlappende gleich große Würfel zerlegt. Ist es dabei notwendig, dass zu jedem Würfel (mindestens) ein anderer existiert, so dass beide eine gemeinsame Seitenfläche haben?

Aufgabe 3 (6 P.)**.** Auf einem Tisch liegen zunächst N Haufen mit je einer Nuss, $N > 2$. Zwei Spieler ziehen abwechselnd, indem sie jeweils zwei Haufen auswählen, die teilerfremde Anzahlen von Nüssen haben, und diese zu einem Haufen zusammenlegen. Der Spieler, der den letzten Zug macht, gewinnt. Ermittle für jedes N den Spieler, der gewinnen kann unabhängig davon, wie der Gegner spielt.

Aufgabe 4 (6 P.)**.** Das Trapez $ABCD$ sei nicht gleichschenklig. (Bemerkung: Ein Trapez heißt gleichschenklig, wenn die Mittelsenkrechten zweier paralleler Seiten zusammenfallen. Dann sind an jeder dieser zwei Seiten die beiden angrenzenden Winkel gleich.) Der Umkreis des Dreiecks ΔBCD schneide die Gerade durch A und C zweimal, einmal in C und einmal im Punkt A_1. Analog seien B_1, C_1 und D_1 definiert. Beweise, dass $A_1B_1C_1D_1$ ebenfalls ein Trapez ist.

Aufgabe 5 (8 P.)**.** Die unendliche Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sei wie folgt gegeben: $a_1 = 1$ und für $n > 1$ sei $a_n = a_{n-1} + 1$, wenn der größte ungerade Teiler von n den Rest 1 bei der Teilung durch 4 lässt, und $a_n = a_{n-1} - 1$, wenn dieser Rest 3 ist. Beweise, dass in dieser Folge jede positive ganze Zahl unendlich oft vorkommt.

(Bemerkung: Der Anfang der Folge ist 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, ...)

Aufgabe 6 (9 P.)**.** Das Polynom $P(x)$ habe reelle Koeffizienten. Ferner gebe es unendlich viele Paare ganzer Zahlen (m, n), für die $P(m) + P(n) = 0$ gilt. Beweise, dass es einen Punkt gibt, um den der Graph $y = P(x)$ punktspiegelsymmetrisch ist.

Aufgabe 7. Ein Test habe 30 Fragen mit je zwei Antwortmöglichkeiten (einer richtigen und einer falschen). In jedem Versuch beantwortet Victor alle Fragen und wird über die Anzahl der richtigen Antworten informiert. Kann Victor seine Antworten so festlegen, dass er die Antworten aller Fragen

(a) (5 P.) nach dem 29sten Versuch kennt (er also im 30sten Versuch alle Fragen richtig beantworten kann)?

(b) (5 P.) nach dem 24sten Versuch kennt (er also im 25sten Versuch alle Fragen richtig beantworten kann)?

(Bemerkung: Anfangs weiß Victor die Antwort zu keiner Frage. Der Test ist bei jedem Versuch derselbe.)

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4 Stunden. Viel Erfolg!