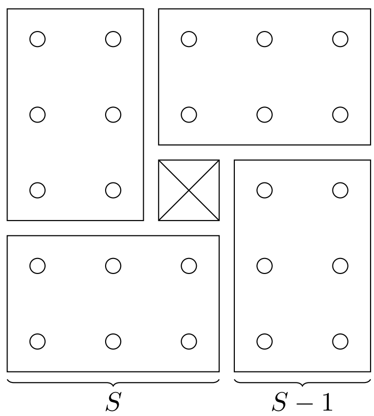
Lösungshinweise zur Vorbereitungsaufgabe

Um euch auf den HTMB vorzubereiten und auch, um einen Eindruck von dem Förderprojekt zu bekommen, habt ihr eine Geschichte mit Aufgaben von uns erhalten. Der Text stammt von unserem Projektgründer Prof. Dr. Karl Kießwetter (1930 – 2019), der auch viele unserer Themenzettel entwickelt hat.

Hier haben wir einige Lösungswege gesammelt, viele davon habt ihr uns selbst erklärt. Wir haben uns sehr über eure vielfältigen Ideen gefreut! Vielleicht erkennt ihr hier auch eure eigenen Überlegungen wieder.

1 Legefigur

In der Geschichte finden die Zwillinge Katrin und Fritz ein Buch mit der folgenden Zeichnung:



Ihr Opa erklärt ihnen dann, dass die Zeichnung einen Beweis der alten Griechen für den folgenden Satz zeigt:

Ist Z eine ungerade Zahl, so ist Z^{2}˘1 ein Vielfaches von 8.

Dann fordert er sie auf, den Beweis zu erklären. Genau das war auch eure Aufgabe. (Bemerkung: Hier verwenden wir jetzt die Kurzschreibweise Z^2 für $Z \cdot Z$, die ihr euch für den Ankreuztest, den GSAT-M, gut merken solltet.)

Was soll man hier tun?

Erst einmal ist es gar nicht so einfach, den Satz richtig zu verstehen. Darin kommt der Buchstabe „Z“ vor. Viele von euch kennen schon aus der Schule, dass man einen Buchstaben schreibt, für den man verschiedene Zahlen schreiben könnte. (Vielleicht verwendet ihr in der Schule eher den Buchstaben „x“ oder für eine natürliche Zahl den Buchstaben „n“. Man kann aber auch andere Buchstaben dafür benutzen, wie in unserem Satz das „Z“.) In diesem Satz kann Z eine beliebige ungerade Zahl sein.

Diesen Satz zu beweisen bedeutet, zu begründen, dass diese Behauptung richtig ist und zwar wirklich für jede mögliche ungerade Zahl Z. Man kann das natürlich erst einmal für einige Beispiele ausprobieren: Im Aufgabentext werden schon die Fälle $Z = 3$, $Z = 5$ und $Z = 23$ untersucht, hier ist $Z^2 - 1$ immer ein

Vielfaches von 8. Auch für zum Beispiel $Z = 7$ erhält man $Z^2 - 1 = 49 - 1 = 48 = 8 \cdot 6$. Interessant ist es auch, zu testen, ob $Z = 1$ schon funktioniert. Hier erhält man, $Z^2 - 1 = 0$ und auch 0 ist ein Vielfaches von 8, da $0 \cdot 8 = 8$. Man kann immer mehr ungerade Zahlen durchprobieren (beispielsweise auch die im Text genannten Zahlen 1001, 21099 und 987654321). So findet man aber keinen Beweis: Das Problem ist, dass es unendlich viele ungerade Zahlen gibt. Deshalb kann man nicht alle ungeraden Zahlen ausprobieren.

Was kann man stattdessen tun? Man braucht eine Begründung, die für jede ungerade Zahl Z funktioniert. Die Zeichnung soll eine solche Begründung sein, dass $Z^2 - 1$ für jede ungerade Zahl Z eine durch 8 teilbare Zahl ist. Es geht also darum, herauszufinden, was die Zeichnung bedeutet und was sie mit dem Satz zu tun hat.

Was kann man in der Zeichnung erkennen?

Als erstes hilft es, sich die Zeichnung genau anzusehen. Viele von euch haben erkannt, dass die Zeichnung zu dem Fall $Z = 5$ passt. Zum Beispiel lässt sich die Skizze so beschreiben:

Man sieht hier Punkte, die zu einem Quadrat angeordnet sind. In der Mitte wäre eigentlich auch ein Punkt, aber hier ist nur ein Kästchen mit einem Kreuz. Eigentlich wären es 5 Reihen mit 5 Punkten, also $5^2 = 25$ Punkte, aber einer fehlt, also sind es $24 = 5^2 - 1$ Punkte. Das Bild passt also zu $Z = 5$.

Einige von euch haben an dieser Stelle schon direkt bemerkt, dass wir hier eine Eigenschaft von ungeraden Zahlen verwenden. Dazu haben sie erklärt:

Es gibt einen mittleren Punkt, weil 5 eine ungerade Zahl ist und es deshalb senkrecht und waagerecht eine mittlere Reihe gibt.

Diese Beobachtung verdeutlicht schon, dass die Skizze in ähnlicher Form auch für andere ungerade Zahlen gezeichnet werden könnte.

Die Zeichnung kann noch genauer beschrieben werden. Viele von euch haben darin zunächst ein Vielfaches von 4 erkannt:

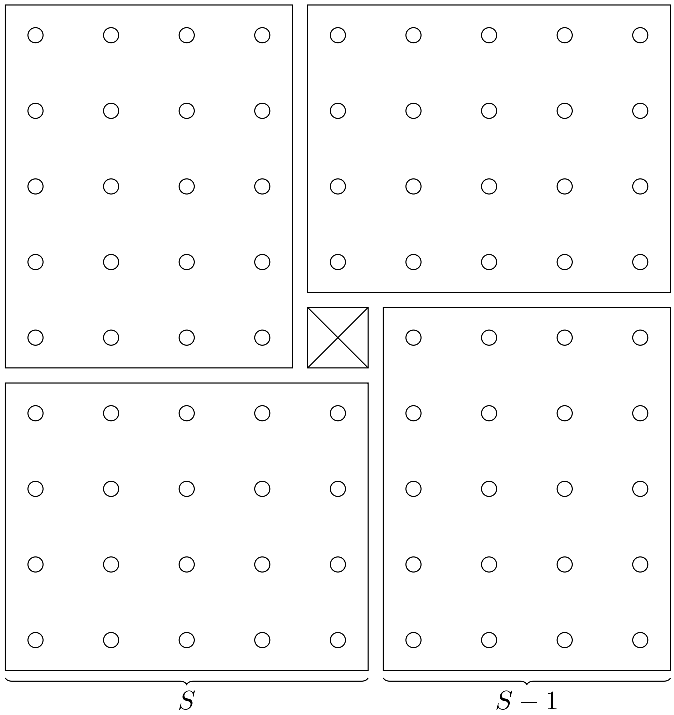
Um die Punkte sind Rechtecke gezeichnet. Es sind 4 Rechtecke mit jeweils gleich vielen Punkten (nämlich 6). Also ist die Zahl der Punkte schon einmal durch 4 teilbar.

Mit diesen Erkenntnissen sind wir schon der Lösung sehr nahe: Wir konnten direkt in der Zeichnung ablesen, dass für $Z = 5$ die Zahl $Z^2 - 1$ ein Vielfaches von 4 sein muss, ohne dafür die Punkte zu zählen. Jetzt müssen wir noch sicherstellen,

1. dass dieses Prinzip auch für alle anderen ungeraden Zahlen Z funktioniert
2. und dass wir nicht nur die Teilbarkeit durch 4, sondern sogar Teilbarkeit durch 8 zeigen können.

Hier habt ihr etwas unterschiedliche Wege gewählt, manche beginnen mit dem zweiten Teil und manche mit dem ersten.

Zum 1. Teil hatten wir schon die Erkenntnis, dass es für ungerade Zahlen Z in dem $Z \times Z$-Quadrat immer in mittleres Feld gibt, dass gestrichen werden kann. Außerdem hilft es, sich die Zeichnung noch einmal genauer anzusehen: Hier sind noch die Seitenlängen S und $S-1$ markiert. Im Fall $Z=5$ ist $S=3$ und $S-1=2$. Für $Z=9$ erhält man eine entsprechende Zeichnung mit $S=5$ und $S-1=4$:



Allgemein lässt sich die Konstruktion zum Beispiel so beschreiben:

Wenn man in dem $Z \times Z$-Quadrat das mittlere Feld durchstreicht, kann man den Rest in vier gleiche Rechtecke zerlegen. Man kann die ungerade Zahl Z als $Z = S + (S-1)$ schreiben. Dann sind S und $S-1$ die Seitenlängen der Rechtecke. Die Rechtecke sind also Heteromeken.

(Zur Erinnerung: Der Begriff „Heteromeke" kam im Aufgabentext vor. Ein Heteromeke ist ein Rechtecke, dessen eine Seite genau um einen länger ist als die andere.)

Damit ist klar, dass $Z^2 - 1$ immer durch 4 teilbar ist.

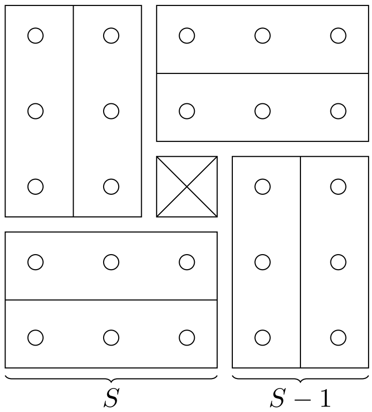
Aus der Konstruktion habt ihr aber auch eine Begründung für den 2. Teil gefunden:

Eine der beiden Zahlen S und $S-1$ ist immer gerade. Also ist die Anzahl der Punkte in jedem der vier Rechtecke gerade. Daher ist $Z^2 - 1$ das Vierfache einer geraden Zahl. Wenn man eine eine gerade Zahl mal 4 nimmt, ist das Ergebnis durch 8 teilbar.

Wenn man diese beiden Teile zusammenfügt, erhält man einen vollständigen Beweis.

Alternative Lösungen

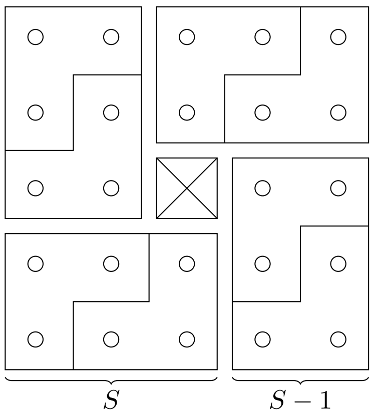
Manche von euch haben die Teilbarkeit durch 8 auch verdeutlicht, indem sie die Zeichnung noch etwas erweitert haben:



Die Erklärung, warum das immer geht, ist dann ähnlich wie zuvor:

Eine der beiden Seiten S und $S-1$ der Heteromeken muss gerade sein, die kann man jeweils halbieren. Dadurch erhält man 8 gleiche Rechtecke.

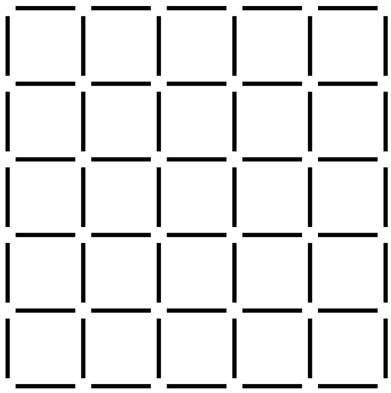
Im letzten Jahr hatten einige Kinder eine ähnliche Idee, zu der sie die Zeichnung folgendermaßen ergänzt haben:



Seht ihr, wie diese Zerlegung für andere Werte von Z funktionieren könnte?

2 Streichholz-Quadrat

Im Anschluss bekommen die Zwillinge in der Geschichte eine weitere Aufgabe gestellt:



$l = 5$

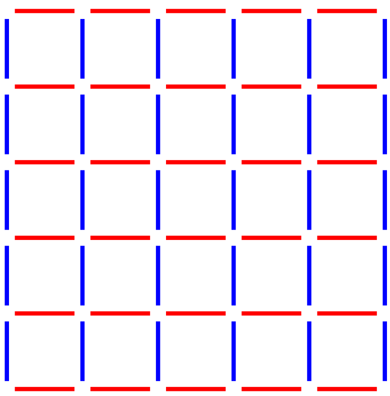
Zu zeigen ist, dass für alle aus Streichhölzern gelegte quadratische Kästchenfiguren (der obigen Art) die Zahl der benötigten Streichhölzer ein Vielfaches von 4 ist.

Mögliche Lösungswege

Bei dieser Aufgabe gibt es sehr verschiedene Lösungswege. In manchen Lösungen werden Ideen aus der Lösung zum letzten Aufgabenteil verwendet. Seht ihr in welchen?

Die meisten Lösungswege können am Beispiel der Seitenlänge 5 erklärt werden. Hier sind einige Varianten, vielleicht fällt euch noch mehr ein:

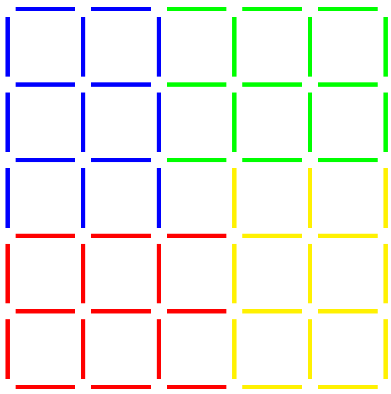
1. Wir können waagerechte und senkrechte Reihen zählen:



$l = 5$

Bei der Länge 5 gibt es senkrecht und waagerecht immer 6 Reihen mit 5 Streichhölzern. Also gibt es insgesamt zweimal $5 \cdot 6$ Streichhölzer. Allgemein hat man immer eine Reihe mehr als die Seitenlänge und deshalb muss man die Seitenlänge mit der nächstgrößeren Zahl multiplizieren, um die Anzahl der waagerecht liegenden Streichhölzer auszurechnen. (Als Formel: Für die Länge l sind es $l \cdot (l + 1)$ waagerecht liegende Streichhölzer.) Das ist dann also eine gerade Zahl, weil einer *der beiden Faktoren gerade ist. Die Zahl muss man noch verdoppeln, weil es genauso viele senkrecht liegende Streichhölzer gibt. (Insgesamt sind es $2 \cdot l \cdot (l+1)$ Streichhölzer.) Wenn man eine gerade Zahl verdoppelt, ist das Ergebnis durch 4 teilbar.*

2. Eine andere Lösung könnte so aussehen:

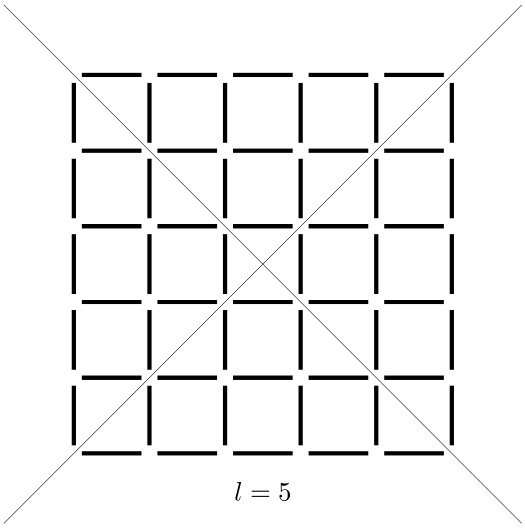


$l = 5$

Man kann das Streichholzquadrat immer in vier gleiche Rechtecke zerlegen, bei denen immer eine Seite offen ist.

Hinweis: Hier muss man vorsichtig sein, weil die Lösungen sich für gerade und ungerade Zahlen etwas unterscheiden! Bei $l = 5$ erhält man Heteromeken mit offenen Seiten. Wie sieht es zum Beispiel für $l = 6$ aus? Wann erhält man was für Rechtecke? Auch einige der nächsten Lösungen funktionieren für alle Zahlen, aber sehen für gerade und ungerade Zahlen ein bisschen verschieden aus, so dass es helfen kann, beide Fälle zu unterscheiden. Wir zeigen euch jeweils eine Zeichnung für $l = 5$, ihr könnt euch überlegen, wie die entsprechenden Zeichnungen für andere Längen aussehen.

3. Es gibt natürlich auch andere Möglichkeiten, die Figur in vier gleiche Teile zu teilen, zum Beispiel:

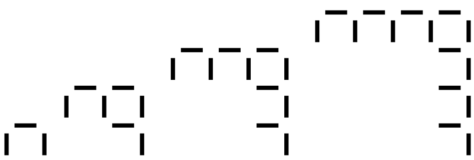


Man kann die Figur so wie hier gezeigt immer in 4 gleiche dreieckige Teile zerteilen. Also ist die Gesamtanzahl durch 4 teilbar.

4. Eine andere Möglichkeit könnte sein, erst einmal die Anzahl der Streichhölzer für verschiedene Längen zu betrachten:

l	1	2	3	4	5
Anzahl	4	12	24	40	60

Daraus ergibt sich die Beobachtung, dass 8 Streichhölzer hinzukommen, wenn das Streichholzquadrat der Länge 1 zum Quadrat der Länge 2 ergänzt wird, beim Ergänzen zur Länge 3 kommen dann 12 Streichhölzer hinzu, danach 16, danach 20. Die Anzahl der hinzugefügten Streichhölzer wird offenbar immer um 4 Streichhölzer größer. Diese Behauptung kann man begründen, indem man die Figuren der hinzukommenden Streichhölzer vergleicht (wobei wir hier mit dem Unterschied von Länge 1 und 0 anfangen):



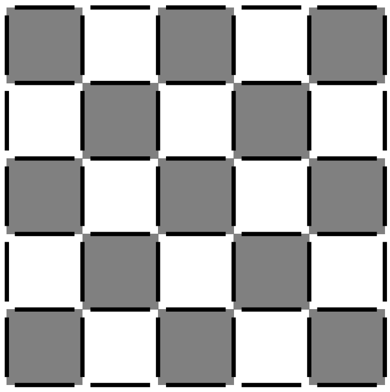
Man sieht hier, dass man jede Figur aus der vorherigen erhält, indem man oben links und unten rechts immer zwei Streichhölzer anfügt. Diese Lösung könnte zum Beispiel so formuliert werden:

Wenn man das Streichholzquadrat immer größer baut, braucht man zuerst 4 Streichhölzer für Länge 1. Dann fügt man 8 hinzu für die Länge 2, dann 12, ... Die Zahl, die man hinzufügen muss, wird immer um 4 größer. Das ist so, weil die hinzugefügten Streichhölzer immer einen

Haken bilden, der in jedem Schritt oben links und unten rechts vergrößert wird, so dass 4 Streichhölzer dazukommen. Da man mit 4 anfängt und dann immer durch 4 teilbare Zahlen dazu tut, ist die Zahl insgesamt durch 4 teilbar.

5. Einige Kinder hatten die Idee, auszunutzen, dass jedes Kästchen von 4 Streichhölzern umrandet wird.

   Etwas einfacher wird es, wenn man nicht jedes Kästchen betrachtet, sondern nur jedes zweite:



$l = 5$

Wenn man wie bei einem Schachbrett jedes zweite Quadrat ausmalt, dann gehören zu jedem ausgemalten Quadrat 4 Streichhölzer. Außerdem bleiben einige Streichhölzer auf dem Rand übrig, aber auf jeder der 4 Seiten gleich viele. Deshalb ist die Anzahl insgesamt durch 4 teilbar.