

Wie bearbeite ich ein Übungsblatt?

Einer der zentralen Bestandteile der Mathematikveranstaltungen an der Universität sind die meist wöchentlich zu bearbeitenden Übungsblätter. Mathematikerinnen und Mathematiker stimmen praktisch universell überein, *dass man Mathematik nur durch eigene intensive Beschäftigung mit den Inhalten lernt*. Die Übungsaufgaben sind dafür eine wichtige Hilfe.

Unterschiede zur Schule

In der Schule werden viele von Ihnen die Erfahrung gemacht haben, dass die Hausaufgaben mehr oder weniger offensichtliche Variationen von im Unterricht behandelten Aufgaben und Problemstellungen waren. Oft gab es dann zu einem vorgegebenen Typ von Aufgabe gleich mehrere Exemplare, die sich nur in Nuancen unterschieden.

Hier an der Universität ist das anders. Normalerweise lassen sich die gestellten Aufgaben zwar durchaus mit Hilfe des in der Vorlesung behandelten Stoffes lösen. Es ist aber fast nie so, dass man noch einmal ein Beispiel eines Lösungsschemas durchrechnet, welches in der Vorlesung präsentiert wurde. Stattdessen sind oft noch eigene, mehr oder weniger kleine Überlegungen und Ideen notwendig, um die Aufgaben zu lösen. Andererseits sind die Aufgaben meist Prototypen, deren erfolgreiche Lösung Ihnen auch das Lösen von vielen ähnlichen Aufgaben erlaubt (die dann aber nicht mehr explizit auf dem Übungsblatt auftauchen). Verstehen Sie die Aufgaben auch als Anregungen, worauf Sie bei der Nachbearbeitung der Vorlesung besonders achten sollten!

Die Arbeit an einer einzelnen Übungsaufgabe kann durchaus einmal mehrere Stunden in Anspruch nehmen, und zwar mehrere Stunden *effektiver Arbeitszeit*. Machen Sie regelmäßige Pausen, aber sorgen Sie auch dafür, dass Sie während der Arbeitszeit wirklich ungestört arbeiten können. Mobiltelefone o.ä. sind bei der Auseinandersetzung mit Übungsaufgaben hinderlich und sollten bewusst gemieden werden.

Erste allgemeine Folgerungen

Aus dem bisher Gesagten ergeben sich bereits einige Konsequenzen:

- *Die eigene Beschäftigung mit den Aufgaben ist essentiell für den Lernprozeß*. Natürlich können Sie versuchen, die Lösung im Internet zu finden und abzuschreiben. Dies ist aber meist Zeitverschwendung: das Internet weiß nicht, wie genau Ihre Vorlesung aufgebaut ist, also auch nicht, welche Begriffe und Aussagen Sie schon kennen und somit verwenden dürfen. Manchmal sind die Lösungen dort auch einfach falsch, oder zumindest unvollständig, und in jedem Fall verlieren Sie beim blinden Kopieren den Lerneffekt.
- Es ist nützlich, die Aufgaben mit Gleichgesinnten zu diskutieren. Kehren Sie aber bitte spätestens beim Aufschreiben zur selbständigen Arbeit zurück. Auch hier leidet sonst der Lerneffekt erheblich.

- *Die Übungsaufgaben sollten ohne technische Hilfsmittel bearbeitet werden.* Taschenrechner oder Computer sind nur in ganz seltenen Ausnahmefällen nötig, die dann besonders gekennzeichnet sind.

Konkretes Vorgehen

Was aber macht man denn nun, wenn man das neue Aufgabenblatt bekommen hat? Die folgende Aufstellung ist eine für die konkrete Situation angepasste Version von G. Polyas klassischem 4-Schritte-Schema (formuliert als Klappentext von [Pol67] – das Buch erläutert dann die Anwendung des Schemas an zahlreichen Beispielen).

- Lesen Sie die Aufgaben sorgfältig durch – meist ist kein Wort zu viel oder zu wenig.
- Lassen Sie sich nicht entmutigen, wenn Sie nicht auf Anhieb verstehen, was eigentlich zu tun ist.
- Nachdem Sie die Aufgaben gelesen und, so weit Ihnen zu diesem Zeitpunkt möglich, verstanden haben, legen Sie das Blatt zur Seite. Arbeiten Sie, falls Sie dies noch nicht getan haben, erst einmal die Vorlesungen der vergangenen Woche nach.

Der gerade genannte Schritt ist nicht zu unterschätzen. Zum Nacharbeiten der Vorlesung anhand der Vorlesungsnotizen gibt es ein separates Merkblatt. Für den Erfolg des Studiums im allgemeinen und die Bearbeitung der Übungsblätter im besonderen ist es essentiell, dass Sie die Definitionen aller Begriffe beherrschen, und die in den Sätzen der Vorlesung formulierten wesentlichen Eigenschaften der untersuchten Objekte sowie ihre Beziehungen zueinander kennen (und verstehen). Dies ist eine Grundvoraussetzung, um die Aufgaben zu begreifen und Lösungsstrategien entwickeln zu können.

- Wenn Sie immer noch unsicher sind, was zu tun ist, *formulieren Sie eine klare Frage* und reden Sie dann mit Kommilitoninnen und Kommilitonen, Übungsleiterinnen oder -leitern oder mit der/dem Vorlesenden. Der Satz “Ich verstehe das nicht.” ist keine Frage, sondern eine Aussage!
- Nachdem Sie die Aufgabe verstanden haben, entwickeln Sie einen Plan. Hier einige Denkanstöße dazu:
 - Gibt es ähnliche Probleme, für die Sie eine Lösung kennen?
 - Welche aus der Vorlesung bekannten Aussagen könnten nützlich sein?
 - Kann man einfache Beispiele “zum Spielen” generieren?
 - Können Sie die Aufgabe in einem Spezialfall/in einem Beispiel lösen? Kann man daraus eine allgemeinere Lösungsstrategie ableiten?
 - Würden stärkere Voraussetzungen oder mehr Informationen bei der Lösung helfen? Wenn ja, welche?
 - Kann man das Problem in Teilaufgaben zerlegen?

- Auch bei der Entwicklung eines Planes kann es hilfreich sein, mit anderen Studierenden zu diskutieren. Achten Sie darauf, dass Sie Ihre Gedanken möglichst präzise formulieren, und fragen Sie umgekehrt nach, wenn Sie bei anderen etwas nicht verstehen.
- Führen Sie Ihren Plan aus. Kontrollieren Sie dabei jeden Schritt auf seine Zulässigkeit. Können Sie diese beweisen?
- Falls Sie bei der Ausführung des Plans stecken bleiben, so versuchen Sie das Problem mit Ihrem Plan so genau wie möglich zu lokalisieren. Passen Sie dann Ihren Plan an oder entwerfen Sie notfalls einen völlig neuen.

Wenn Sie die Aufgabe gelöst haben

Bei der Suche nach der (selbständigen!) Lösung einer Übungsaufgabe ist praktisch alles erlaubt: herumprobieren, von hinten anfangen, vereinfachen, verallgemeinern, usw. Wenn Sie dann eine Lösung gefunden haben, so ist der nächste Schritt, diese sorgfältig aufzuschreiben. Dazu muss man manchmal einige Schritte der Lösung neu sortieren, damit sie für die Adressaten des Schriftstücks verständlich sind. Formulieren Sie dabei Teilschritte einer vernünftigen Schrittgröße. Ziel ist eine klare Struktur, damit sowohl Sie als auch die Leser stets den Überblick behalten.

Formulieren Sie für sich selbst auch noch einmal so klar wie möglich die zugrundeliegende Strategie, und hinterfragen Sie diese dann kritisch: kann man damit noch mehr machen? Kann man mit der gewählten Argumentation zum Beispiel eventuell mehr beweisen? Vielleicht sogar etwas Falsches? Es kann hilfreich sein, jemandem die eigene Lösung ausführlich zu erklären, denn manchmal wird man erst bei einer solchen Präsentation auf Lücken aufmerksam.

Wenn Sie etwas beweisen sollen, so gehen Sie beim Aufschreiben von den bekannten Tatsachen aus, und argumentieren Sie in Richtung Behauptung.¹ Überlegen Sie sich, an welcher Stelle Sie welche Voraussetzung benutzt haben. Haben Sie wirklich alle Voraussetzungen verwendet? Überzeugen Sie sich auch noch einmal, dass wirklich jeder Schritt zulässig war.

Überlegen Sie sich am Schluss, was Sie bei der ganzen Sache gelernt haben. Welche ähnlichen Probleme könnten Sie jetzt auch lösen? Welche Begriffe sind Ihnen jetzt klarer als vorher? Welche neuen Fragen ergeben sich aus der Lösung?

Worauf wir beim Korrigieren besonderen Wert legen

In den Vorlesungen sehen Sie zu Beginn des Studiums Konzepte, Sätze und Beweise, welche zu einem großen Teil über 100 Jahre alt sind. Sie sind in dieser Zeit meist so perfektioniert worden, dass die Darstellung nur wenig verbessert werden kann. Natürlich erwarten wir von Ihnen nicht die gleiche Eleganz in den Formulierungen, aber einen gewissen Ehrgeiz sollten Sie schon entwickeln.

¹Es gibt auch Beweise, die nicht linear aufgebaut sind. Hier sollten Sie erst recht darauf achten, die Struktur beim Aufschreiben klar zu kommunizieren.

Hier einige konkrete Tipps:

- Betrachten Sie Ihre Lösung als einen kleinen wissenschaftlichen Text, der einer angemessenen äußeren Form bedarf.
- Strukturieren Sie Ihre Lösung klar: wovon gehe ich aus? was benutze ich? welche Schlussfolgerung ziehe ich?
- Wenn Sie etwas beweisen wollen, so formulieren Sie zunächst die entsprechende Behauptung. Dies gilt sowohl global als auch für Teilschritte längerer Beweise.
- Führen Sie sinnvolle Bezeichnungen für mehrfach auftretende Größen ein. Achten Sie insbesondere darauf, dass Sie alle Symbole, die Sie verwenden, vorher definierend eingeführt haben. Wenn plötzlich von einem Objekt x die Rede ist, welches vorher nie erklärt wurde, dann sind die Leser (also in Ihrem Fall die Korrektureur) nur unnötig verwirrt.
- Überlegen Sie sich gut, wann Sie symbolisch argumentieren und wann Sie in ganzen Sätzen formulieren. Letzteres ist oft einfacher zu lesen, und weniger fehleranfällig. Es gibt auch Situationen, in denen formale Schreibweisen deutlich effizienter sind. Gerade am Anfang des Studiums ist es aber deutlich schwieriger, formale Schreibweisen wirklich korrekt zu gebrauchen. Tun Sie dies nicht, so ist die Gefahr groß, dass Ihre Lösung einfach nur unverständlich ist. Erklären Sie also im Zweifelsfall lieber etwas zu viel als zu wenig.
- Vermeiden Sie Worte wie “offensichtlich”, “einfach” und ähnliche, welche in Mathematikbüchern immer wieder auftreten (und dort als Anregung zum Nachdenken gedacht sind). Erklären Sie stattdessen den Grund, *warum* etwas klar ist, denn schließlich wollen Sie jemanden davon überzeugen, dass Sie wirklich alles verstanden haben.

Literatur

- [Pol67] G. Polya, *Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme*, 2. Auflage, A. Francke Verlag Bern und München, 1967.