

Integralrechnung

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(a) \int_0^2 (x^3 + 2x - 4) dx$$

$$(d) \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

$$(b) \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + e^x \right) dx$$

$$(e) \int_0^t e^{3x-2} dx$$

$$(c) \int_0^{\frac{3\pi}{2}} x^2 \sin\left(\frac{x}{3}\right) dx$$

$$(f) \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2) dx$$

In (c) und (d) ist es am einfachsten, (wiederholt) partiell zu integrieren, in (e) und (f) helfen geeignete Substitutionen. Überlegen Sie jeweils zuerst, ob Sie eine positive oder negative Antwort erwarten.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie eine *stetige* Funktion $F: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass die Ableitung $F'(x)$ für alle $x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$ die folgende Funktion ist

$$f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 4x - 1, & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ 2x + 3, & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 - x, & \text{für } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Kann man F so wählen, dass es in den Punkten 0 und 1 ebenfalls differenzierbar wird?

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit der jeweils angegebenen Methode:

$$(a) \int \frac{1}{(2+x)^2} dx \quad (\text{Substitution})$$

$$(b) \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1}{x} + 1} dx \quad (\text{Substitution } t = \frac{1}{x} + 1)$$

$$(c) \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx \quad (\text{Substitution})$$

$$(d) \int e^x \sin(2x) dx \quad (\text{mehrfache partielle Integration})$$

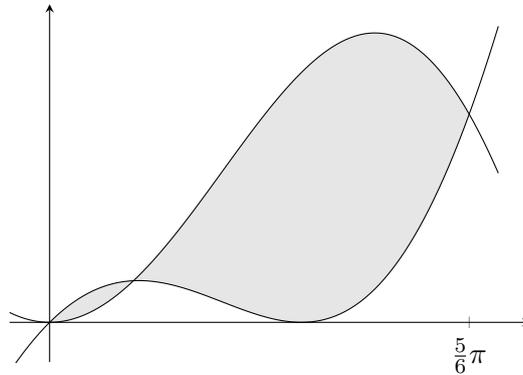
Aufgabe 4

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx.$$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Fläche zwischen den Kurven $f(x) = x \cdot \sin x$ und $g(x) = x - x \cdot \sin x$ im Intervall $[0, (5/6)\pi]$. Es soll also die graue Fläche in der unten stehenden Figur berechnet werden.

**Aufgabe 6**

Über eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei bekannt:

- f ist überall differenzierbar, und es gilt $f'(x) = k \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sowie
- $f(0) = c$.

Beweisen Sie, dass dann $f(x) = c \cdot e^{kx}$ folgt.

Tipp: Die Lösung dieser Aufgabe benötigt nicht unbedingt Integralrechnung.