

Beweismethoden I

Aufgabe 1

Geben Sie für folgende Aussagen jeweils einen direkten Beweis.

- (a) Zwischen je zwei rationalen Zahlen $a < b$ existiert eine weitere rationale Zahl.
- (b) Eine ganze Zahl, deren Dezimaldarstellung mit der Ziffer '5' endet, ist durch 5 teilbar.
- (c) Für natürliche Zahlen $m < n$ gilt $\frac{m}{n} < \frac{m+1}{n+1}$.

Aufgabe 2

Beweisen Sie folgende Aussagen indirekt (d.h. mit Hilfe der Kontraposition).

- (a) Ist die Summe zweier reeller Zahlen irrational, so ist mindestens eine der beiden Zahlen irrational.
- (b) Ist x eine irrationale Zahl, so ist auch $\sqrt{x}$ eine irrationale Zahl.

Aufgabe 3

Suchen Sie sowohl einen direkten Beweis als auch einen Beweis durch Widerspruch für folgende Aussage:

Zwischen 0 und 1 gibt es unendlich viele rationale Zahlen.

Aufgabe 4

Es sei X eine Menge, und A und B seien Teilmengen von X . Beweisen Sie die Äquivalenz folgender drei Aussagen:

- $A \subseteq B$.
- $A \cap (X \setminus B) = \emptyset$.
- $(X \setminus A) \cup B = X$.

Aufgabe 5

Ist es möglich, für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ (paarweise verschiedene) Punkte $P_1, \dots, P_n$ und eine Gerade g so in die Ebene zu legen, dass g durch keinen der Punkte P_i verläuft, aber die Verbindungsstrecken $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$ sowie P_nP_1 schneidet? Betrachten Sie einige Beispiele, stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

Aufgabe 6

Stellen Sie eine Vermutung über die Gültigkeit der Aussage „Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^2 + n + 41$ eine Primzahl.“ auf. Geben Sie einen Beweis oder ggf. ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 7

Wir betrachten die Menge $\mathcal{F}$ aller zusammenhängenden Figuren aus endlich vielen Quadraten gleicher Größe, welche jeweils wie im Bild an Kanten aneinander liegen.



Geben Sie für jede der 12 möglichen Implikationen der Form

$$\forall F \in \mathcal{F} : A_i(F) \implies A_j(F)$$

zwischen den folgenden 4 Aussagen entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

- (A₁) Die Anzahl der Quadrate der Figur $F \in \mathcal{F}$ ist 3.
- (A₂) Die Anzahl der Quadrate der Figur $F \in \mathcal{F}$ ist durch 3 teilbar.
- (A₃) Die Figur $F \in \mathcal{F}$ lässt sich aus Steinen der Form $\square\square\square$ zusammensetzen.
- (A₄) Die Figur $F \in \mathcal{F}$ lässt sich aus Steinen der Form $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$ zusammensetzen.

Aufgabe 8 (a) Geben Sie ein Beispiel einer Summe aus zwei irrationalen Zahlen an, die rational ist.

(b) Ist $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ rational oder irrational? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(c) Beweisen Sie, dass es unter drei beliebigen irrationalen Zahlen stets zwei gibt, deren Summe ebenfalls irrational ist.

Aufgabe 9

Auf dem Tisch liegen 100 Karten verdeckt in einer Reihe. Jetzt werden die Karten an den Positionen 2, 4, 6, ... umgedreht. Dann werden die Karten an den Positionen 3, 6, 9, ... umgedreht (die Karte an Position 6 ist dann also wieder verdeckt), dann die Karten an den Positionen 4, 8, 12, ... usw. (d.h. im k -ten Zug werden alle Karten an den Positionen $k, 2k, 3k, \dots$ umgedreht), bis in der letzten Runde nur noch die Karte an Position 100 umgedreht wird. Welche Karten sind am Schluss verdeckt?

Aufgabe 10 (a) Beweisen Sie: Die Quersumme einer natürlichen Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn die Zahl selbst durch 3 teilbar ist.

(b) Ist diese Aussage auch für andere Teiler als 3 wahr?

Aufgabe 11

Zeigen Sie, dass alle reellen Lösungen der Gleichung $x^5 - 2x^3 - 3 = 0$ kleiner als 2 sind. Versuchen Sie das Resultat auch für eine bessere Schranke als 2 zu beweisen.

Aufgabe 12

Beweisen Sie, dass sowohl $\sqrt[3]{2}$ als auch $\log_2(3)$ irrationale Zahlen sind. Verallgemeinern Sie dieses Resultat und beweisen Sie Ihre Verallgemeinerung.