

Lineare Gleichungssysteme und Geometrie

Aufwärmübung

Seien $\mathbf{a} = (1, 3)$ und $\mathbf{b} = (2, 1)$ zwei Vektoren in der Ebene \mathbb{R}^2 .

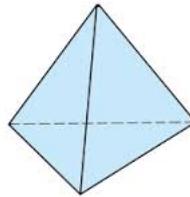
- (a) Berechnen Sie $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $2 \cdot \mathbf{b}$ und $2 \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a}$.
- (b) Skizzieren Sie die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} sowie die eben berechneten Vektoren im \mathbb{R}^2 .

Aufgabe 1

Welcher Kreis ist Lösungsmenge der Gleichung $x^2 - 6x + y^2 - 6y = 11$? Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius dieses Kreises.

Aufgabe 2 (a) Welche Figuren können entstehen, wenn man eine Ebene mit einem Würfel schneidet?

- (b) Welche Figuren können entstehen, wenn man eine Ebene mit einem Tetraeder schneidet? Finden Sie einen Schnitt, welcher ein Quadrat ist? Zur Information: Ein Tetraeder ist eine Körper im Raum der durch vier gleichseitige Dreiecke beschränkt wird. Unten ist ein Tetraeder abgebildet.



Aufgabe 3

Wir betrachten die Gerade g , gegeben durch die Gleichung

$$4x - 3y + 2 = 0.$$

- (a) Schreiben Sie die Gerade g in Parameterform.
- (b) Skizzieren Sie die Gerade g in einem Koordinatensystem.
- (c) Berechnen Sie einen Normalenvektor \mathbf{n} zu g .

Aufgabe 4

Geben Sie zwei Geraden im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 an, welche

- (a) parallel sind;

(b) sich in genau einem Punkt schneiden;

(c) windschief sind, d.h. sie sind nicht parallel und schneiden sich nicht.

Aufgabe 5 (a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden in der Ebene, welche durch den Punkt $\mathbf{p} = (2, -1)$ geht und den Normalenvektor $\mathbf{n} = (3, 2)$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden in der Ebene, welche durch den Punkt $\mathbf{p} = (-3, 4)$ geht und den Richtungsvektor $\mathbf{r} = (5, 2)$ besitzt.

Aufgabe 6

Entscheiden Sie, ob sich die zwei Geraden

$$g = \{(2, 1) + t \cdot (5, 4) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad h = \{(1, 2) + t \cdot (4, 3) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

in einem Punkt schneiden, und berechnen Sie gegebenenfalls diesen Schnittpunkt.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene im \mathbb{R}^3 , welche den Punkt $(1, 2, 3)$ enthält und senkrecht auf dem Vektor $(-3, -2, -1)$ steht.

Aufgabe 8

Sei E die Ebene $x + 2y - z = 1$ und sei F die Ebene $-x - y + 5z = 3$. Bestimmen Sie die Schnittmenge von E und F .

Aufgabe 9

Bestimmen Sie die Schnittmenge des Kreises mit Gleichung $x^2 + y^2 = 100$ und der Geraden mit Gleichung $y = x - 2$.

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems in den Variablen x , y und z in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ty + z &= 1 \\tx + ty + z &= 1 + t.\end{aligned}$$

Aufgabe 11

Sei $L = \{(2, 1, 7) + t(0, 6, 4) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie die Schnittpunkte von L mit der xy -Ebene, der xz -Ebene und der yz -Ebene.

Aufgabe 12

Sei E die Ebene im \mathbb{R}^3 durch $\mathbf{x}_1 = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$ und $\mathbf{x}_3 = (2, 2, -6)$. Liegt $\mathbf{z} = (-2, 4, 3)$ in E ?

Aufgabe 13

Welche Eckpunkte besitzt das Dreieck, welches durch Spiegelung an der Ebene $x + y + 2z - 1 = 0$ aus dem Dreieck mit den Eckpunkten $(1, 2, 3)$, $(-1, 0, 2)$ und $(1, 2, -1)$ hervorgeht?