Aufgaben zum Vorkurs Mathematik: Allgemeine Übungsaufgaben

Dies ist eine Sammlung von Aufgaben, die hauptsächlich Mittelstufenstoff wiederholen. Dabei handelt es um Grundlagen, die man für das Studium können sollte. Am Anfang sind die Aufgaben thematisch gemischt. Am Ende, in den Kopien, nach Gebieten sortiert. Dort finden sich auch ganz elementare Rechenaufgaben. Die Aufgaben stammen (fast alle) aus den folgenden Büchern, in denen auch die Lösungen zu finden sind:

- Vorkurs Mathematik : Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen von Erhard Cramer und Johanna Neslehova, Springer-Verlag, Berlin, 2012.
- Übungsbuch zum Grundkurs Mathematik für Ingenieure, Natur- und Wirtschaftswissenschaftler von Kurt Marti, Springer-Verlag, Heidelberg, 2010.
- Aufgabensammlung Mathematik : Für Studierende in mathematisch-naturwissenschaftlichen und technischen Studiengängen von Herbert Wallner, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2012.
- Logischen Katastrophen auf der Spur von Andrej Konforowitsch, Fachbuchverl. Leipzig im Hanser-Verl., München, 1997.

Aufgabe 1:
Lösen Sie die Gleichungen

(a) $6x^2 + 5|x| - 4 = 0$ **(b)** $3x^2 - 4|x| + 1 = 0$

Aufgabe 2:
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind

(a) Eine Parallele zur x-Achse kann Graph einer Funktion sein.
(b) Jede Parallele zur y-Achse ist Graph einer Funktion.
(c) Jede Parallele zur x-Achse schneidet den Graphen einer Funktion nur an genau einer Stelle.
(d) Jede Parallele zur y-Achse schneidet den Graphen einer Funktion immer nur an genau einer Stelle.

Aufgabe 3:
Skizzieren Sie in der x,y-Ebene die Menge der Punkte (x,y) deren Koordinaten das folgende System von Ungleichungen erfüllen:

(a)
$$\begin{aligned} x - y &\le 1 \\ 3 &\le 3x + y \\ x + y &\le 3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x + y &\le 2 \\ 4 &\le 4x - y \\ x - y &\le 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$

(a) den maximalen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertebereich,
(b) die Intervalle, in denen f monoton wächst bzw. fällt,
(c) die Intervalle, für die $f(x) > 0$ gilt.

Aufgabe 5:
Stellen Sie die Funktion

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ -x + 5 & \text{für } 2 \leq x < 5 \end{cases} \qquad D = [0, 5), W = ?$$

graphisch dar.

Aufgabe 6:
Die Punktmengen $A_1, ..., A_4$ einer Ebene seien bestimmt durch
$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x\}$
$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq -x\}$
$A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq -x + 3\}$
$A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x - 3\}$

Man bestimme (graphisch)
$A_1 \cap A_4$, $A_2 \cap A_3$, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$, $(A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_3)$, $A_1 \backslash A_2$, $A_1 \backslash A_3$

Aufgabe 7:
Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen
(z.B. indem Sie sich überlegen, wie die Funktionen sich gegen ∞ und $-\infty$ verhalten und wo die Nullstellen sind.)

(a)	$x \mapsto 2x$	**(e)**	$x \mapsto -x^2 + x + 2$
(b)	$x \mapsto -x + 3$	**(f)**	$x \mapsto x^3 - 1$
(c)	$x \mapsto x^2$	**(g)**	$x \mapsto x^3 - 2x^2 + x$
(d)	$x \mapsto x^2 - 16$	**(h)**	$x \mapsto -x^3 - x^2$

Aufgabe 8:
Erinnern Sie sich an die Graphen folgender Funktionen:
$\sin(x), \quad \cos(x), \quad e^x, \quad \ln(x), \quad x, \quad x^2$

Überlegen Sie sich dann, wie der Graph von Produkten dieser Funktionen (z.B. $x \cdot \sin(x)$; $\sin(x) \cdot \cos(x)$; $x^2 \cdot e^x$; ...) aussieht. Überprüfen Sie Ihre Ideen dann mit einen graphikfähigen Taschenrechner oder einen Computer. Falls Sie keine Idee hatten oder Ihre sich als falsch herausstellte, erklären Sie im Nachhinein den Graphen.

Aufgabe 9:
Lösen Sie die Betragsgleichungen

(a) $|5x-1|=9$
(b) $|3x-2|+2=x^2$
(c) $|x-1|+2|x-2|=2x$
(d) $|x+1|+2=-|2x-6|+|x-1|$
(e) $|x-3|-|2x+4|=0$
(f) $|x-5|+|x+1|-2|x-2|=1$

Aufgabe 10:
Ermitteln Sie alle Schnittpunkte der durch die folgenden Gleichungen festgelegten Geraden:

$$\textbf{(I)}\ 2y+x=4 \quad \textbf{(II)}\ 4x-y=1 \quad \textbf{(III)}\ 2x+4y=-1$$

Aufgabe 11:
Geben Sie das Polynom p kleinsten Grades an, das folgende Nullstellen und Funktionswerte besitzt:
(a) Nullstellen: $x_1=-4,\ x_2=4$
Funktionswert: $p(0)=4$
(b) Nullstellen: $x_1=x_2=1,\quad x_3=x_4=x_5=0,\quad x_6=-2$
Funktionswert: $p(-1)=4$

Aufgabe 12:
Begründen Sie, warum die Wurzelgesetze nicht anwendbar sind:

(a) $f(x)=\sqrt{-1-x}\sqrt{x-1}\neq\sqrt{1-x^2}$
(b) $f(x)=\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{1-x^2}\neq 1-x^2,\quad f(x)\neq|1-x^2|$
(c) $f(x)=\sqrt{(1-x^2)^4}\neq(1-x^2)^2$
(d) $f(x)=\sqrt[12]{(1-x^2)^4}\neq\sqrt[3]{(1-x^2)}$

Aufgabe 13:
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

(a) $2+\sqrt{3x(x+2)}=x$
(b) $1-\sqrt{2x-3}=x$
(c) $x+\sqrt{1-x}=\frac{1}{2}$
(d) $\sqrt{x+1}+\sqrt{1-3x}=2$

Aufgabe 14:
Zeichnen Sie in derselben Abbildung die Graphen der folgenden Funktionen

$$\sin(x),\ 4\sin(x),\ \frac{1}{2}\sin(x)$$

im Bereich $0\leq x\leq 2\pi$.

Aufgabe 15:
Sei $M_m = \{x \in \mathbb{R} | m-1 < x \leq m+1, m \in \mathbb{Z}\}$. Bestimmen Sie:

(a) $M_{-2} \cup M_0$

(b) $M_3 \cup M_4$

(c) $\bigcup_{-m \in \mathbb{N}_0} M_m$

(d) $\bigcup_{m=1}^{5} M_m$

(e) $\bigcup_{m=-1}^{4} M_{m+n},\ n \in \mathbb{Z}\ (fest)$

(f) $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} m_{m+5}$

Aufgabe 16:
Gegeben seien die folgenden Funktionen:

$$f_1 : \mathbb{R} \to [0, \infty), x \longmapsto x^2$$
$$f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \longmapsto \sqrt{x}$$

(a) Sind die Funktionen surijektiv, injektiv oder bijektiv?
(b) Schränken Sie Definitions- und Wertebereich so ein, dass beide Funktionen bijektiv sind.

Aufgabe 17:
Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung

$$x + 10\sqrt{x} + 16 = 0.$$

Aufgabe 18:
Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

$$|(x+1) - (x-3)| \leq 5$$

Aufgabe 19:
Finden Sie den Fehler in folgendem Beweis:

Behauptung: $4 = 5$

Beweis: Durch einfaches Umformen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&16 - 36 = 25 - 45 \\
&16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4}, \\
&\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2, \\
&4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2},
\end{aligned}$$

also $4 = 5$. $\square$

Aufgabe 20:
Finden Sie den Fehler in folgendem Beweis:

Behauptung: $5 = 7$

Beweis: Es sei $b = 1$ und $a = 1,5$. Dann ist $10a = 15b$ und $14a = 21b$. Wir subtrahieren die beiden letzten Gleichungen voneinander und erhalten

$$14a - 10a = 21b - 15b$$

bzw.

$$15b - 10a = 21b - 14a$$

also

$$5(3b - 2a) = 7(3b - 2a)$$

und damit $5 = 7$. $\square$

Aufgabe 21:
Finden Sie den Fehler in folgendem Beweis:

Behauptung: Wenn $a > b$, dann ist $a > 2b$.

Beweis: Es sei also $a > b$. Wir multiplizieren beide Seiten dieser Ungleichung mit b und erhalten $ab > b^2$. Weiter folgen die Umformungen:

$$\begin{aligned} ab - a^2 &> b^2 - a^2, \\ a(b-a) &> (b+a)(b-a), \\ a &> b + a \end{aligned}$$

zur letzten Ungleichung addieren wir die Ausgangsungleichung und erhalten $2a > 2b + a$, also $a > 2b$. $\square$

Aufgabe 22:
Finden Sie den Fehler in folgendem Beweis:

Behauptung: $3 > 7$

Beweis: Wir nehmen einen beliebigen Logarithmus von beiden Seiten der zweifellos richtigen Ungleichung $\left(\frac{1}{3}\right)^3 > \left(\frac{1}{3}\right)^7$:

$$3 \log\left(\frac{1}{3}\right) > 7 \log\left(\frac{1}{3}\right)$$

Jetzt dividieren wir beide Seiten der Ungleichung durch $\log\left(\frac{1}{3}\right)$ und gelangen zu der Ungleichung $3 > 7$. $\square$

Aufgabe 23:
Finden Sie den Fehler in folgendem Beweis:

Behauptung: Jede natürliche Zahl ist gleich ihrem Nachfolger.

Beweis: Wir nehmen an, dass $k = k + 1$. Wenn wir auf jeder Seite dieser Gleichung eine 1 addieren, so erhalten wir $k + 1 = k + 2$. Wir haben also daraus, dass die Behauptung für $n = k$ richtig ist, geschlossen, dass sie für $n = k + 1$ richtig ist. Damit haben wir bewiesen, dass jede natürliche Zahl gleich ihrem Nachfolger ist. $\square$

Aufgabe 24:
Finden Sie den Fehler in folgendem Beweis

Behauptung: Zwei beliebige Zahlen sind immer gleich.

Beweis: Es seien a und b zwei solche Zahlen, dass $a > b$ gilt. Mit d bezeichnen wir das arithmetische Mittel der beiden Zahlen:

$$d = \frac{a+b}{2} \quad \text{oder} \quad a + b = 2d.$$

Aus der letzten Gleichung erhalten wir die beiden Gleichungen

$$b = 2d - a \quad \text{und} \quad 2d - b = a$$

Diese multiplizieren wir miteinander

$$2db - b^2 = 2ad - a^2.$$

Jetzt subtrahieren wir auf beiden Seiten d^2 und erhalten

$$-d^2 + 2db - b^2 = -d^2 + 2ad - a^2,$$

also $-(d-b)^2 = -(d-a)^2$ und daher $d - b = d - a$.
Die letzte Gleichung bedeutet, dass wir die gleiche Differenz erhalten, wenn wir von d die Zahl a bzw. die Zahl b subtrahieren. Somit gilt also $a = b$. $\square$

Aufgabe 25:
Finden Sie den Fehler in den folgenden Beweisen:

Behauptung: Die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n \tag{1}$$

hat für natürliche n größer als 2 keine Lösung in positiven ganzen Zahlen x, y, z

1. Beweis: Wir führen den Beweis indirekt. Wir nehmen an es existiert ein $n > 2$, so dass die Gleichung (1) eine Lösung(x_0, y_0, z_0) in positiven ganzen Zahlen besitzt. Dafür gilt $x_0, y_0 < z_0$.
Keiner wird den Satz des Pythagoras anzweifeln, für den Hunderte von Beweisen gefunden wurden. Er lässt sich in folgender Form schreiben:

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{2}$$

wobei x, y, z die Längen der Katheten bzw. der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sind. Die Gleichungen (1) und (2) können wir wie folgt umformen:

$$\left(\frac{x}{z}\right)^n + \left(\frac{y}{z}\right)^n = 1, \qquad \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$$

Die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen sind gleich, also gilt

$$\left(\frac{x}{z}\right)^n + \left(\frac{y}{z}\right)^n = \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1 \tag{3}$$

Die Gleichung (3) hat aber nur für $n = 2$ Lösungen (x_0, y_0, z_0) mit $x_0, y_0 < z_0$. Also sind wir ausgehend davon, dass der Große Fermatsche Satz falsch ist, zu einem Widerspruch gelangt, was bedeutet, dass das Gegenteil unserer Annahme wahr ist, das heißt der Große Fermatsche Satz ist wahr. □

2. Beweis: Der große Fermatsche Satz behauptet, dass

$$x^n + y^n \neq z^n \tag{1}$$

für $n > 2$ gilt. Der Satz des Pythagoras besagt

$$x^n + y^n = z^n, \tag{2}$$

wenn zwei Bedingungen erfüllt sind: a) $n = 2$ und b) x, y, z bilden ein pythagoreisches Zahlentripel (x, y, z sind ganze Zahlen und entsprechen den Längen der Katheten bzw. der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks). Das bedeutet: wenn eine der Bedingungen a) oder b) nicht erfüllt ist, dann ist die Gleichung (2) nicht erfüllbar. Wir können also schließen, dass für $n > 2$ (also bei Verletzung der Bedingung a)) die Gleichung (2) nicht erfüllbar ist, also (1) gilt, sogar unabhängig von der Bedingung b), d.h. für alle ganzen Zahlen x, y, z. □

3.2 Aufgabe (▶101Lösung)

Kürzen Sie folgende Brüche. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Bruch definiert ist.

(a) $\frac{64}{24}$
(b) $\frac{27a}{18b}$
(c) $\frac{54a^2}{a^3}$
(d) $\frac{63a^2b}{14ab^2}$
(e) $\frac{25x-5y}{15xy}$
(f) $\frac{56x^2y-16xy^2}{24yz+40y^2}$
(g) $\frac{12xy-4yz}{16xz+8xy}$
(h) $\frac{3ab^4-17ab^2+39a^2b^2}{ab^2}$
(i) $\frac{63a^2b^2-9ab}{18ab+27a^2b^2}$

3.3 Aufgabe (▶101Lösung)

Kürzen Sie folgende Brüche, und verwenden Sie dabei ggf. die binomischen Formeln. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Bruch definiert ist.

(a) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x+y}$
(b) $\frac{a^2-2ab+b^2}{2a-2b}$
(c) $\frac{7a^2-14ab+7b^2}{3(a-b)}$
(d) $\frac{x^2-y^2}{6x-6y}$
(e) $\frac{27a^2+36ab+12b^2}{9a^2+12ab+4b^2}$
(f) $\frac{54a^2-36ab+6b^2}{6a-2b}$
(g) $\frac{40x^2-490y^2}{20x^2+140xy+245y^2}$
(h) $\frac{32x^2z+128xyz+128y^2z}{32x^2+64xy}$
(i) $\frac{108a^2c-192b^2c}{54a^2c^2-144abc^2+96b^2c^2}$

3.4 Aufgabe (▶102Lösung)

Addieren bzw. subtrahieren Sie folgende Brüche, und kürzen Sie dann soweit wie möglich. Geben Sie die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

(a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}$
(b) $\frac{a}{5}+\frac{2}{10}$
(c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$
(d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}+\frac{3}{8}$
(e) $\frac{3a}{7}+\frac{6a}{3}-\frac{12a}{21}$
(f) $\frac{2}{a+1}+\frac{1}{3a+3}-\frac{4}{a+1}$
(g) $\frac{2x}{x+1}-\frac{3y}{y+1}+\frac{xy}{(x+1)(y+1)}$
(h) $\frac{3a}{6ab}-\frac{7b}{3a}+\frac{2ab}{4}$
(i) $\frac{x}{-x-2y}+\frac{y}{x+2y}$
(j) $\frac{2y}{3z+6}-\frac{1-y}{z+2}+\frac{3x-2xy}{3xz+6x}$

3.5 Aufgabe (▶102Lösung)

Addieren bzw. subtrahieren Sie folgende Brüche, und kürzen Sie dann soweit wie möglich. Verwenden Sie ggf. die binomischen Formeln. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

(a) $\frac{a^2+7ab+4b^2}{3a+6b} - \frac{ab}{a+2b}$ (b) $\frac{2a^2+5ab}{4(a+1)} + \frac{4b^2-2ab}{8a+8}$ (c) $\frac{3x}{x-y} - \frac{4(x-y)}{x+y}$

3.6 Aufgabe (▶103Lösung)

Multiplizieren bzw. dividieren Sie folgende Brüche, und kürzen Sie dann soweit wie möglich. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

(a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$

(b) $\frac{10}{7} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3}$

(c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{3}{b}$

(d) $\frac{3}{12b} \cdot \frac{4b^2}{6}$

(e) $\frac{3}{a^2} \cdot \frac{ab^2}{9} \cdot \frac{18a}{b^2}$

(f) $\frac{ab^2}{a+1} \cdot \frac{2a+2}{b^2} \cdot \frac{16}{2ab}$

(g) $\frac{40ab+10c}{a^2c^2} \cdot \frac{a^2b^2+c}{12ab+3c}$

(h) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$

(i) $\frac{3x}{4y} : \frac{6x^2}{2y^2} : \frac{21}{16xy}$

(j) $\frac{3y^2}{3x+1} : \frac{6y^2}{12x+4}$

(k) $\frac{2x-7y}{5y^2+6z} : \frac{6x-21y}{25y^2z+30z^2}$

(l) $\frac{35xy^2}{8x-4y} : \frac{70x^2y}{4x-2y}$

3.7 Aufgabe (▶103Lösung)

Berechnen Sie folgende Brüche, und kürzen Sie dann soweit wie möglich. Verwenden Sie dabei ggf. die binomischen Formeln. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

(a) $\frac{2}{x-y} \cdot \frac{4}{x+y}$

(b) $\frac{3}{a-b} \cdot \frac{a^2-b^2}{9} \cdot \frac{2}{a+b}$

(c) $\frac{a+b}{x} : \frac{y}{a+b}$

(d) $\frac{x+y}{x^2-y^2} : \frac{x-y}{x+y} : \frac{1}{x+y}$

(e) $\frac{2x^2+4xy+2y^2}{3x^2-6x+3} : \frac{(x+y)^2}{x-1}$

(f) $\frac{16x^3-4xy^2}{48x^2+48xy+12y^2} : \frac{4x^2+2xy}{12x-6y}$

(g) $\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by}$

(h) $\frac{\frac{a}{a+1}-\frac{b}{b+1}}{\frac{a-b}{a+b}}$

(i) $\frac{\frac{ab}{2a+4}+\frac{b}{a+2}}{\frac{a}{b+3}-\frac{ab}{3b-9}}$

3.8 Aufgabe (▶104Lösung)

Schreiben Sie folgende Ausdrücke als Potenzen. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

(a) $(x-y)(x-y)(x-y)(x-y)$

(b) $\frac{1}{a}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{1}{-a}$

(c) $(-a^2)\cdot(-a)^2\cdot(-a)^3$

(d) $\frac{xy}{-z}\cdot\frac{-xy^2}{z^2}\cdot\frac{x^2(-y)}{z}$

(e) $(x+y)^{-3}(x+y)^8(x+y)^{-2}$

(f) $\frac{(x-y)^{-1}}{(x+y)^2}\cdot\frac{(x+y)^{-2}}{(x-y)^3}$

3.9 Aufgabe (▶104Lösung)

Fassen Sie folgende Ausdrücke zusammen. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

(a) $(a^2)^3$

(b) $((-2)^2)^4$

(c) $(a^2b)^3$

(d) $\frac{(x-1)^3}{(1-x)^3}$

(e) $(x-1)^4+7(x-1)^4-12(x-1)^4+3(x-1)^4$

(f) $13(a-1)^3+2(1-a)^3-8(a-1)^3+2(1-a)^3$

3.10 Aufgabe (▶104Lösung)

Fassen Sie folgende Ausdrücke zusammen. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

(a) $2^3a^3b^3\cdot 7^3c^3$

(b) $x^2yz^3\cdot xy^2+(2xyz)^3$

(c) $5^2x^{-1}y^3\cdot 5^{-2}x^2y^{-2}$

(d) $(4(x^2y^2))^3-((2xy)^3)^2$

(e) $16xy^2\cdot(2x)^2-2^5x^3y^2+(8x)^2\cdot x^{-1}(xy)^2$

(f) $-121ab^3-(11a^2b)^2\cdot(-2a^{-3}b)$

3.11 Aufgabe (▶105Lösung)

Fassen Sie folgende Ausdrücke zusammen, wobei $m, n \in \mathbb{N}_0$ vorausgesetzt wird. Verwenden Sie ggf. die binomischen Formeln. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

(a) $\frac{2a^4a^n}{36}$

(b) $\frac{x^7x^n}{y^3y^{-m}}$

(c) $\frac{a^3b^2}{3}\cdot\frac{a^nb^m}{a^{3+n}b^{2+m}}$

(d) $\left(\frac{a^7}{b^3}:\frac{a^{7+n}}{b^n}\right)\cdot\frac{a^n}{b}$

(e) $\left(\frac{xy}{z^n}\right)^2:\frac{(xy)^n}{z^4}$

(f) $\frac{4x^{a+1}}{15xy^{a-1}}:\frac{(2x^a)^2}{5y^a}$

(g) $\frac{(2x+y)^8}{(4x^2+4xy+y^2)^6}$

(h) $\frac{(16a^2-36b^2)^6}{(16a^2-48ab+36b^2)^3}$

(i) $\frac{\left((x^2+2x+1)(x-1)^2\right)^3}{(x^2-1)^6}$

3.12 Aufgabe (▶105Lösung)

Fassen Sie folgende Ausdrücke zusammen. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

(a) $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$

(b) $15\sqrt{ab} - 12\sqrt{ab} + 6\sqrt{ab} - 8\sqrt{ab}$

(c) $12\sqrt{x} - \sqrt{4x} - \sqrt{x}$

(d) $2\sqrt{75y} + \sqrt{27y} - 3\sqrt{48y}$

(e) $\sqrt{3 \cdot 7} \cdot \sqrt{3 \cdot 7}$

(f) $\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 3} \cdot \sqrt{2 \cdot 3} \cdot \sqrt{5}$

(g) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{2}$

(h) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{a^2b^2}$

3.13 Aufgabe (▶106Lösung)

Fassen Sie folgende Ausdrücke zusammen. Verwenden Sie ggf. die binomischen Formeln. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

(a) $\sqrt{36a^4b^4} : \sqrt{4a^2}$

(b) $x\sqrt{xy} \cdot 2y\sqrt{y} \cdot 4\sqrt{x}$

(c) $(\sqrt{x+y} - \sqrt{y-z})(\sqrt{x+y} + \sqrt{y-z})$

(d) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}$

(e) $\frac{3\sqrt{45}}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{(x-y)(x+y)}}$

(f) $\frac{16\sqrt{x-y}}{9} - \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{81(x+y)}}$

(g) $\frac{12\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{9x-9y}} - 3\sqrt{x+y}$

(h) $\frac{3y^{a+2}}{\sqrt{2x^2+4xy+2y^2}} + \frac{3xy^{a+1}}{\sqrt{2}(x+y)}$

3.14 Aufgabe (▶106Lösung)

Fassen Sie folgende Ausdrücke zusammen. Verwenden Sie ggf. die binomischen Formeln. Geben Sie ggf. die Werte der Variablen an, für die der gegebene Term definiert ist.

(a) $\sqrt[3]{8^5}$

(b) $\sqrt{\sqrt{a^4}}$

(c) $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}$

(d) $\sqrt[8]{a^2b \cdot \sqrt[4]{b^{12}}}$

(e) $\sqrt[4]{(x+1)^8} \cdot \sqrt[4]{x+1}$

(f) $\frac{\sqrt[6]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[8]{y^6 \cdot \sqrt[9]{y^2}}}$

(g) $\frac{\sqrt[5]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^9 \cdot \sqrt{x^{45}}}}}{\sqrt[3]{y^2 \cdot \sqrt[3]{y^6}}} \cdot \frac{\sqrt[6]{y^5 \cdot \sqrt[4]{y^{36}}}}{\sqrt[4]{x^3 \cdot \sqrt[6]{x^{18}}}}$

(h) $\frac{a^2-4b^2}{\sqrt[3]{a^9}-b\cdot\sqrt{16a^2b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^3}}$

(i) $\frac{(3+5\sqrt{a})^2}{9-25a} \cdot \frac{12-20\sqrt{a}}{\sqrt{36+120\sqrt{a}+100a}}$

5.6 Aufgaben

5.1 Aufgabe (▶178Lösung)

Geben Sie an, welche der Zuordnungen mit Definitionsbereich $\mathbb{D} = \{a, b, c, d\}$ und Wertebereich $\mathbb{W} = \{a, c, e\}$ Funktionen von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{W}$ sind.

(a) $(a, a), \quad (b, a), \quad (c, a), \quad (d, a)$

(b) $(a, a), \quad (c, c)$

(c) $(b, a), \quad (c, c), \quad (d, e)$

(d) $(b, c), \quad (c, e), \quad (d, a), \quad (a, c)$

(e) $(a, a), \quad (b, a), \quad (a, c), \quad (d, c)$

(f) $(a, e), \quad (b, c), \quad (d, a), \quad (c, e)$

(g) $(a, a), \quad (b, a), \quad (c, c), \quad (c, e), \quad (d, a)$

(h) $(a, c), \quad (b, c), \quad (c, e), \quad (d, b)$

5.2 Aufgabe (▶179Lösung)

Prüfen Sie folgende Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 3$

(b) $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 4],\ f(x) = x^2$

(c) $f : [0,2] \longrightarrow [0,16]$, $f(x) = 2x^3$

(d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$, $f(x) = e^x + 1$

(e) $f : [0,2] \longrightarrow [0,1]$, $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

(f) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $f(x) = \frac{1}{x} + 4$

(g) $f : [-1,1] \longrightarrow [1,2]$, $f(x) = x^2 + 1$

5.3 Aufgabe (▶179Lösung)

Verketten Sie die Funktionen f und g zu $f \circ g$ und $g \circ f$. Die Definitionsbereiche der Funktionen können als geeignet angenommen werden.

(a) $f(x) = 2x$, $g(y) = y^2$

(b) $f(x) = 4x^3$, $g(y) = \frac{2}{y}$

(c) $f(x) = e^{3x}$, $g(y) = \ln(y + \frac{1}{3})$

(d) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$, $g(y) = y^2 - 1$

(e) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$, $g(y) = 16y^4$

(f) $f(x) = (x-1)(x-2)$, $g(y) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$

5.4 Aufgabe (▶180Lösung)

Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich der Verkettung $f \circ g$ und ermitteln Sie die Funktionswerte an den angegebenen Stellen.

(a) $f(x) = x^2$, $g(y) = y - 1$; $y = 3$

(b) $g(x) = x^2$, $f(y) = y - 1$; $x = 3$

(c) $f(x) = x^2$, $g(y) = \frac{1}{y}$; $y = -1$

(d) $f(x) = \ln(x)$, $g(y) = \frac{1}{y}$; $y = 1$

(e) $f(x) = \ln(x)$, $g(y) = e^{-y}$; $y = \frac{1}{2}$

(f) $f(x) = x^{1/3}$, $g(y) = \frac{1}{y}$; $y = 8$

(g) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $g(y) = \frac{1}{y}$; $y = -2$

(h) $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $f(y) = \frac{1}{y}$; $x = -2$

(i) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(y) = \frac{2y^3-3y^2-2y+3}{y^3+y-2y^2-2}$; $y = 0$

Hinweis: Raten Sie Nullstellen und führen Sie ▶272Polynomdivisionen aus.

7.4 Aufgaben

7.1 Aufgabe (►279Lösung)

Lösen Sie die Polynomgleichung durch Faktorisierung.

(a) $x^6 - 2x^5 - 15x^4 = 0$

(b) $4x^5 - 9x^3 = 0$

(c) $3x^4 - 27x^3 + 42x^2 = 0$

(d) $\frac{1}{22}x^7 - \frac{3}{22}x^6 + 7x^5 = 0$

(e) $x^3 - 11x^2 + 30x = 0$

(f) $2x^5 + 14x^4 - 36x^3 = 0$

7.2 Aufgabe (►280Lösung)

Lösen Sie die Polynomgleichung mit der Substitutionsmethode.

(a) $3x^4 - 78x^2 + 507 = 0$

(b) $\frac{1}{2}x^4 - 12x^2 + 64 = 0$

(c) $2x^6 + 38x^3 - 432 = 0$

(d) $x^8 + 4x^4 + 6 = 0$

(e) $4x^4 - 84x^2 - 400 = 0$

(f) $x^{12} + 3x^6 + 2 = 0$

(g) $x^{10} + 31x^5 - 32 = 0$

(h) $\frac{1}{4}x^8 - 3x^4 - 16 = 0$

7.3 Aufgabe (►281Lösung)

Führen Sie jeweils eine Polynomdivision durch.

(a) $(x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 2) : (x - 1)$

(b) $(x^7 - 4x^5 + x^2 + x - 2) : (x + 2)$

(c) $(x^4 - 3x^2 - 2) : (x^2 - 2)$

(d) $(x^5 + 2x^4 - x^3 + 3x^2 + 6x - 3) : (x^3 + 3)$

(e) $(x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x) : (x^3 - 2x)$

(f) $(x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 8x - 16) : (x^3 + 2x^2 - x + 4)$

7.4 Aufgabe (►282Lösung)

Lösen Sie die Polynomgleichung mittels Polynomdivision. Verwenden Sie die vorgegebenen Lösungen x_1 und x_2.

(a) $x^4 - x^3 - 12x^2 - 4x + 16 = 0$; Vorgabe: $x_1 = 4, x_2 = -2$

(b) $x^3 - 5x^2 - 29x + 105 = 0$; Vorgabe: $x_1 = 3$

(c) $2x^4 - 8x^3 - 42x^2 + 72x + 216 = 0$; Vorgabe: $x_1 = -2, x_2 = 6$

(d) $x^4 - 3x^3 - 33x^2 + 15x + 140 = 0$; Vorgabe: $x_1 = -4, x_2 = 7$

7.5 Aufgabe (▶284Lösung)

Faktorisieren Sie die folgenden Terme. Verwenden Sie dazu Polynomdivisionen und die vorgegebenen Nullstellen x_1 und x_2.

(a) $x^4 - 2x^3 - 27x^2 + 108$; Nullstellen: $x_1 = 2, x_2 = -3$

(b) $x^4 + x^3 - 85x^2 + 23x + 1260$; Nullstellen: $x_1 = -4, x_2 = 5$

(c) $2x^4 + 4x^3 - 162x^2 + 396x$; Nullstelle: $x_1 = 3$

(d) $x^4 + 8x^3 + 25x^2 + 42x + 36$; Nullstellen: $x_1 = -3, x_2 = -3$

7.6 Aufgabe (▶285Lösung)

Vereinfachen Sie folgende Brüche so weit wie möglich. Verwenden Sie ggf. Polynomdivisionen.

(a) $\frac{x^3-13x+12}{x-3}$

(b) $\frac{x^4-x^3-12x^2+28x-16}{x^2-4x+4}$

(c) $\frac{x^3+x^2-2x}{x^3-x}$

(d) $\frac{x^3-11x^2+10x+72}{3x^2-48}$

(e) $\frac{x^2-2x-8}{x^2-16}$

(f) $\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^3+2x^2+x}$

7.7 Aufgabe (▶286Lösung)

Zerlegen Sie die folgende Polynome in Linearfaktoren. Raten Sie dazu ggf. Nullstellen.

(a) $x^2 - 1$

(b) $t^3 - 5t^2 + 3t + 9$

(c) $u^3 - 3u^2 - \frac{1}{9}u + \frac{1}{3}$

(d) $x^3 - 2x + 1$

(e) $z^3 - \frac{13}{6}z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{1}{3}$

(f) $x^4 - x^3 - 34x^2 - 56x$

(g) $y^6 + \frac{3}{2}y^5 - 5y^4 - 6y^3 + 4y^2$

6.11 Aufgaben

6.1 Aufgabe (▶244Lösung)

Lösen Sie die linearen Gleichungen.

(a) $4x + (2x - 3) = 3$

(b) $(3 - x) + (6x - 1) = 5x + 2$

(c) $(4x + 1) - (2x - 2) = 9$

(d) $-4 + (7x + 1) = 3(x - 1)$

(e) $4(1 + 2x) = 3 + 2(1 + 4x)$

(f) $x(3 + 4) + 14 = 7(x + 2)$

(g) $4x + 5(x + 2) = 12 + 5x$

(h) $1 - 2(x + 2) = (4 + x) - 3(x + 2)$

(i) $3(x + 5) - 5(1 + 3x) = 2$

(j) $3(3x - 1) - 3x = 3(1 + 2x)$

6.2 Aufgabe (▶245Lösung)

Bestimmen Sie die Lösungen der quadratischen Gleichungen. Verwenden Sie ggf. die ▶14binomischen Formeln.

(a) $(x + 3)(x + 4) = 0$

(b) $x^2 - 9 = 0$

(c) $x^2 - 5x = 0$

(d) $2x^2 = 6x$

(e) $x^2 - 2x + 1 = 0$

(f) $x^2 = 25$

6.3 Aufgabe (▶245Lösung)

Lösen Sie die quadratischen Gleichungen mit der Methode der quadratischen Ergänzung.

(a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

(b) $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$

(c) $-x^2 - 6x - 5 = 0$

(d) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

(e) $x^2 + 10x + 50 = 0$

(f) $x^2 + 14x = -13$

6.4 Aufgabe (▶246Lösung)

Lösen Sie die quadratischen Gleichungen mit der ▶198pq-Formel.

(a) $x^2 + 4x + 3 = 0$

(b) $x^2 + 2x = -1$

(c) $x^2 + x + 1 = 0$

(d) $3x^2 + 3x - 18 = 0$

(e) $x^2 + 5x + 7 = 0$

(f) $x^2 + 6x + 9 = 0$

6.5 Aufgabe (▶246Lösung)

Stellen Sie jeweils eine quadratische Gleichung in Normalform auf, die folgende Lösungen besitzt.

(a) $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

(b) $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 0$

(c) $x_1 = x_2 = 4$

(d) $x_1 = 1 + \sqrt{3},\ x_2 = 1 - \sqrt{3}$

(e) $x_1 = 2,\ x_2 = -5$

(f) $x_1 = x_2 = 0$

6.6 Aufgabe (▶247Lösung)

Schreiben Sie die Terme als Produkt von Linearfaktoren.

(a) $x^2 - 1$

(b) $x^2 - 6x + 4$

(c) $x^2 + \frac{1}{3}x$

(d) $x^2 - 2x - 15$

(e) $x^2 + 5x - 14$

(f) $2x^2 - 2x - 24$

6.7 Aufgabe (▶247Lösung)

Bestimmen Sie jeweils die zweite Lösung der quadratischen Gleichung, ohne diese explizit zu lösen.

(a) $x^2 + x - 6 = 0;\ x_1 = 2$

(b) $x^2 - 8x - 9 = 0;\ x_1 = -1$

(c) $4x^2 - 16x + 7 = 0;\ x_1 = \frac{1}{2}$

(d) $x^2 + \frac{x}{2} - 3 = 0;\ x_1 = -2$

(e) $6x^2 + 2x = 0;\ x_1 = 0$

(f) $2x^2 - 18x + 40 = 0;\ x_1 = 4$

6.8 Aufgabe (▶248Lösung)

Ermitteln Sie jeweils die Definitionsmenge der Bruchgleichung, und lösen Sie die Gleichung.

(a) $\frac{2x-1}{2x+5} = \frac{1}{3}$

(b) $\frac{1}{x+4} = \frac{3}{x-3}$

(c) $\frac{x-2}{x-2} = \frac{2x-7}{3x-9}$

(d) $\frac{4x+3}{x-6} = \frac{4x-5}{x+2}$

(e) $\frac{1}{9x} + \frac{2}{21x} = -\frac{9}{63x} + \frac{2}{21}$

(f) $\frac{x-1}{1-x} - \frac{x-3}{x-1} = 0$

8.5 Aufgaben

8.1 Aufgabe (▶311Lösung)

Lösen Sie die linearen Ungleichungen, und geben Sie die Lösungsmenge an.

(a) $x - 2 > 2x - 1$

(b) $4x + 3 \leqslant 2(x - 6)$

(c) $\frac{x-1}{2} \geqslant \frac{1-x}{3}$

(d) $4(x - 1) - 3(x + 2) < 8$

(e) $2(x - 1) < 6\left(x + \frac{5}{3}\right)$

(f) $3x - 1 \leqslant 2(x - 3) - (2 - x)$

(g) $9x \geqslant \frac{3(6x-1)}{2}$

(h) $-7x \geqslant \frac{3(x-1)}{2}$

8.2 Aufgabe (▶311Lösung)

Lösen Sie die quadratischen Ungleichungen, und geben Sie die Lösungsmenge an.

(a) $x^2 - x - 2 < 0$

(b) $x^2 - 7x + 12 \geqslant 0$

(c) $4x^2 - 8x + 3 > 0$

(d) $-x^2 - 4x + 5 \geqslant 0$

(e) $x^2 + 6x + 9 \geqslant 0$

(f) $-2x^2 + 16x - 32 \geqslant 0$

(g) $-x^2 - 14x - 49 < 0$

(h) $x^2 + 2x + 10 \leqslant 0$

(i) $-3x^2 + 18x - 36 < 0$

(j) $-x^2 + 4x + 21 > 0$

8.3 Aufgabe (▶312Lösung)

Lösen Sie die Bruchungleichungen, und geben Sie die Lösungsmenge an. Bestimmen Sie zunächst die Definitionsmenge der Ungleichung.

(a) $\frac{x+2}{x-3} \leqslant 2$

(b) $\frac{-x}{x-1} > 3$

(c) $\frac{2x-4}{2-x} \geqslant 0$

(d) $\frac{2}{x-1} \leqslant \frac{1}{x+1}$

(e) $\frac{x}{x+3} - \frac{1}{x-2} \geqslant 1$

(f) $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{x+1} \leqslant \frac{-4}{x^2-1}$

8.4 Aufgabe (▶313Lösung)

Lösen Sie die Betragsungleichungen, und geben Sie die Lösungsmenge an.

(a) $|x+2| \leqslant 2x-1$

(b) $|x-3| > 1$

(c) $|x-4| - |2x+6| \geqslant 0$

(d) $|3x-1| + |x+2| \leqslant 3$

(e) $|x+1| - |x-1| + 2|x+2| > 0$

(f) $-|x+1| + |x-3| \geqslant 1 + |x+4|$

8.5 Aufgabe (▶317Lösung)

Bestimmen Sie Definitionsbereich und Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen. Führen Sie ggf. zunächst eine geeignete Substitution aus.

(a) $e^t - 5 \leqslant 2$

(b) $y^2 + y^4 + 2 \geqslant 0$

(c) $e^x + e^{2x} - 1 \leqslant 0$

(d) $\frac{e^x}{e^x+1} \geqslant 1$

(e) $\frac{e^z-1}{e^z-2} \geqslant 0$

(f) $\ln(z^2) - \ln(z-1) \geqslant 0$