

7. Der Cauchysche Integralsatz

Der folgende, auf Cauchy zurückgehende Integralsatz ist fundamental für die Theorie komplexer Funktionen. Er wird auch als *der Hauptsatz der Funktionentheorie* bezeichnet.

Satz (7.1) (Cauchyscher Integralsatz)

Ist $D \subset \mathbb{C}$ ein *einfach zusammenhängendes* Gebiet, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine *holomorphe* Funktion und $c : [a, b] \rightarrow D$ ein *geschlossener* stkw. C^1 -Weg, so gilt

$$\oint_c f(z) dz = 0.$$

Beweis: Wir führen den Beweis durch Zurückführung auf reelle Integrale. Mit $c(t) = (x(t), y(t))^T$ ergibt sich

104

$$\begin{aligned} \oint_c f(z) dz &= \int_a^b (u(\mathbf{c})\dot{x} - v(\mathbf{c})\dot{y}) dt + i \int_a^b (u(\mathbf{c})\dot{y} + v(\mathbf{c})\dot{x}) dt \\ &= \oint_c \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} d\mathbf{x} + i \oint_c \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Beide Vektorfelder unter den Integralen erfüllen aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die Integrabilitätsbedingung

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = -v_x - u_y = 0$$

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = u_x - v_y = 0$$

Da D einfach zusammenhängend ist, sind beide Vektorfelder also Potentialfelder (vgl. A. & O. (19.2.24)) und die geschlossenen Kurvenintegrale verschwinden. \square

105

Bemerkung (7.2) Keine der im Cauchyschen Integralsatz angegebenen Voraussetzungen ist entbehrlich. Dies zeigen die in letzten Abschnitt angegebenen Beispiele:

- $\oint_{|z|=1} \bar{z} dz \neq 0$ (\bar{z} ist nicht holomorph),
- $\oint_{|z|=1} (1/z) dz \neq 0$ (D ist nicht einfach zusammenhängend),
- $\int_{\mathbf{c}} z dz \neq 0$ für $\mathbf{c}(t) = e^{(1+i)t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (\mathbf{c} ist nicht geschlossen).

Folgerung (7.3)

Ist $D \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so ist das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} f(z) dz$ *wegunabhängig* (bei festen Endpunkten).

106

Für stkw. C^1 -Kurven $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 : [a, b] \rightarrow D$ gilt also unter den obigen Voraussetzungen

$$\mathbf{c}_1(a) = \mathbf{c}_2(a), \mathbf{c}_1(b) = \mathbf{c}_2(b) \Rightarrow \int_{\mathbf{c}_1} f(z) dz = \int_{\mathbf{c}_2} f(z) dz.$$

Beweis: $\mathbf{c}_1 + (-\mathbf{c}_2)$ ist eine geschlossene stkw. C^1 -Kurve in D . Die Behauptung folgt damit aus (6.8) b) und e). \square

Satz (7.4) (Existenz einer Stammfunktion)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Ferner sei $z_0 \in D$ ein (beliebiger) fester Punkt. Für $z \in D$ bezeichne \mathbf{c}_z einen beliebigen, die Punkte z_0 (Anfangspunkt) und z (Endpunkt) verbindenden Stkw. C^1 -Weg. Dann ist wegen (7.3) durch

$$F(z) := \int_{\mathbf{c}_z} f(z) dz$$

107

eine Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ wohldefiniert. F ist eine *Stammfunktion* von f , d.h. F ist holomorph auf D und es gilt $F'(z) = f(z)$.

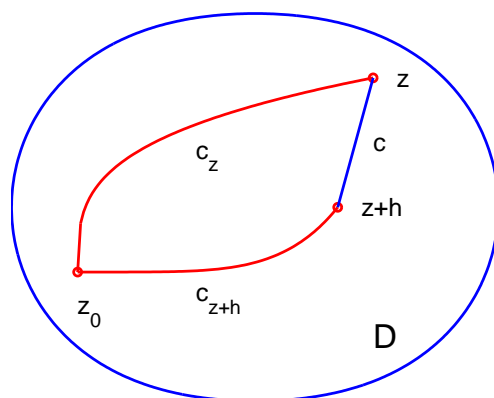


Abb 7.1. Stammfunktion

108

Beweis: Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ und $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| < \varepsilon$ lassen sich die Kurven c_z und c_{z+h} durch die geradlinige Verbindung $c(t) := z + th$, $0 \leq t \leq 1$ zu einer geschlossenen stkw. C^1 -Kurve $c_z + c + (-c_{z+h})$ innerhalb von D ergänzen. Damit wird

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \int_{c_{z+h}} f(z) dz - \int_{c_z} f(z) dz \\ &= \int_c f(z) dz = \int_0^1 f(z+th) h dt, \end{aligned}$$

also

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \int_0^1 |f(z+th) - f(z)| dt \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Damit ist F holomorph auf D mit $F' = f$. □

109

Folgerung (7.5)

Ist f auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ holomorph und ist F eine Stammfunktion von f auf D , so gilt für alle stkw. C^1 -Wege $c : [a, b] \rightarrow D$

$$\int_c f(z) dz = F \Big|_{c(a)}^{c(b)} = F(c(b)) - F(c(a)). \quad (7.6)$$

Beispiel (7.7) $\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{1}{z^2} dz; \quad a, b > 0.$

a) Explizite Integration: $c(t) := a + it, \quad -b \leq t \leq b.$

$$\int_c \frac{dz}{z^2} = \int_{-b}^b \frac{i dt}{(a + it)^2} = - \left(\frac{1}{a + it} \right) \Big|_{-b}^b = \frac{2ib}{a^2 + b^2}$$

110

b) Integration mittels Stammfunktion:

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{dz}{z^2} = \left(-\frac{1}{z} \right) \Big|_{a-ib}^{a+ib} = \frac{2ib}{a^2 + b^2}$$

Bemerkung (7.8)

Anstelle des einfachen Zusammenhangs genügt es, im Cauchyschen Integralsatz zu fordern, dass der geschlossene stkw. C^1 -Weg c **nullhomotop** ist, d.h. dass sich c innerhalb des Gebietes D stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

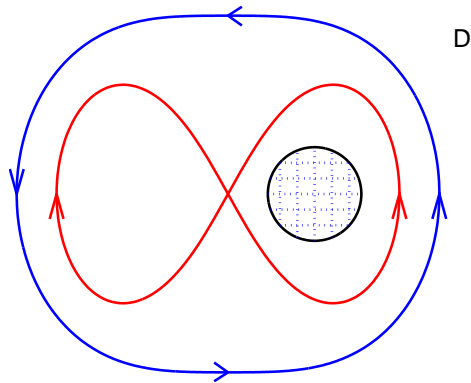
In Verallgemeinerung hierzu wird definiert: Zwei stkw. C^1 -Wege $c, \tilde{c} : [a, b] \rightarrow D$ heißen **homotop**, wenn sie sich (innerhalb des Gebietes D) stetig ineinander deformieren lassen, d.h. es gibt eine stetige Abbildung $\Phi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D$ gibt mit $c(t) = \Phi(t, 0)$ und $\tilde{c}(t) = \Phi(t, 1)$ für alle t .

111

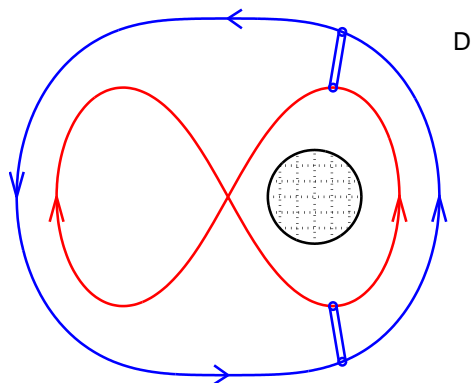
Satz (7.9)

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf dem Gebiet D und sind $c, \tilde{c} : [a, b] \rightarrow D$ geschlossene und in D homotope stkw. C^1 -Wege, so gilt

$$\oint_c f(z) dz = \oint_{\tilde{c}} f(z) dz.$$



112



Beispiel (7.10)

Für jeden einfach geschlossenen stkw. C^1 -Weg c , der einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ einmal im positiven Sinn umläuft, gilt

$$\oint_c \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Denn: c ist homotop zum Weg $\tilde{c}(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

113

Definition (7.11)

Für eine geschlossene stückweise C^1 -Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ heißt

$$\text{Uml}(c; z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{dz}{z - z_0}$$

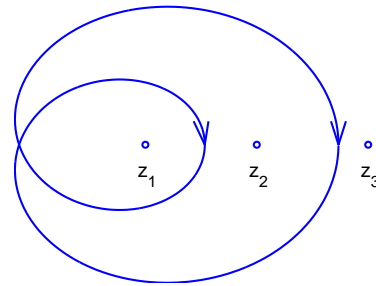
die **Umlaufzahl** von c bezüglich des Punktes z_0 .

$\text{Uml}(c; z_0)$ ist stets eine **ganze Zahl**, sie gibt an, wie oft der Weg c den Punkt z_0 in mathematisch positiven Sinn umläuft.

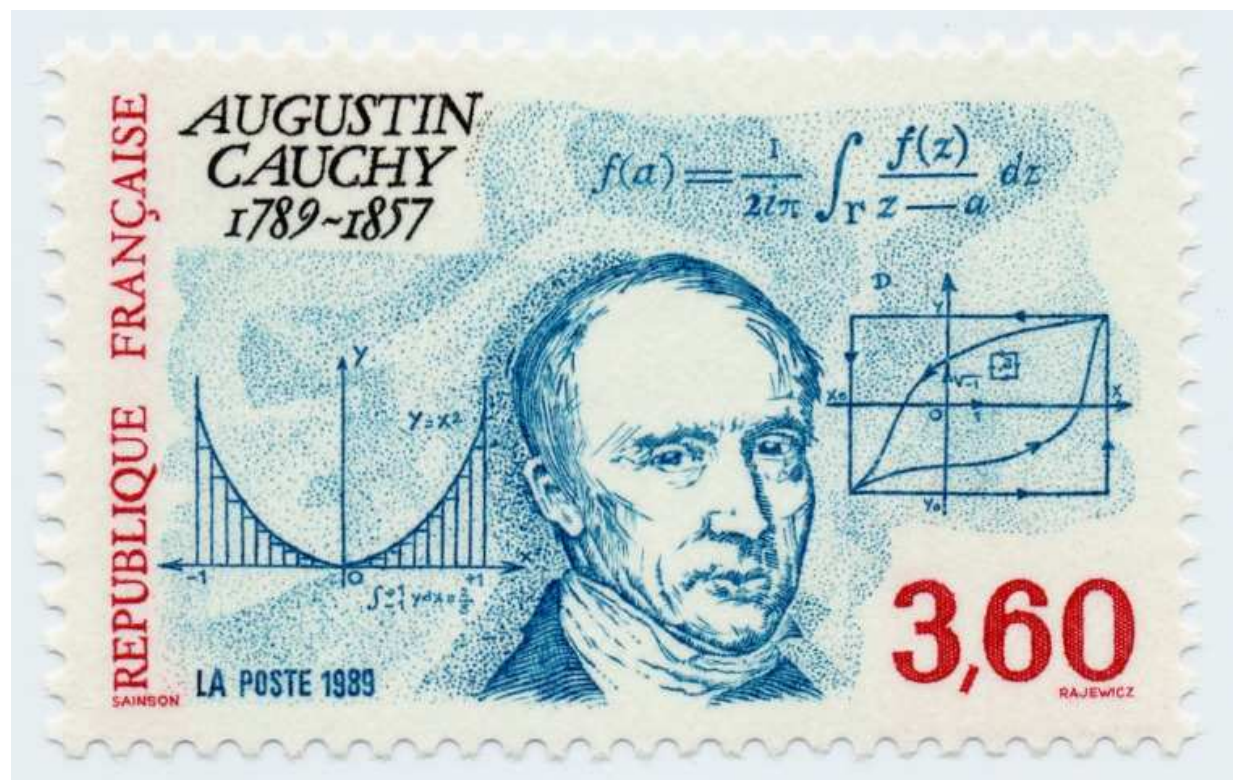
$$\text{Uml}(c; z_1) = -2,$$

$$\text{Uml}(c; z_2) = -1,$$

$$\text{Uml}(c; z_3) = 0.$$



114



115