

6. Komplexe Integration

Bisher haben wir u.a. die folgenden Integrale kennengelernt

A. Reelles Riemann-Integral einer reellen Veränderlichen:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)(t_{i+1} - t_i) \quad (6.1)$$

Für vektorwertige Funktionen wird das obige Integral komponentenweise berechnet, somit haben wir die Definition:

Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist *(Riemann) integrierbar*, falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind und es gilt

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt. \quad (6.2)$$

91

Eigenschaften (6.3)

- $\int_a^b \alpha f(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt, \quad \alpha \in \mathbb{C},$
- $\int_a^b f_1(t) + f_2(t) dt = \int_a^b f_1(t) dt + \int_a^b f_2(t) dt,$
- $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt,$
- $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt,$
- $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$

92

Beweis der letzten Eigenschaft: Man stelle das Integral in Polarkoordinaten dar: $\int_a^b f(t) dt = R e^{i\phi}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= R = e^{-i\phi} \int_a^b f(t) dt \\ &= \int_a^b e^{-i\phi} f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\phi} f(t)) dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\phi} f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt. \quad \square \end{aligned}$$

B. Kurvenintegrale:

Ist $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ ein stückweiser C^1 -Weg, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, so wurde definiert

93

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) ds &:= \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt, \\ \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &:= \int_a^b \langle \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt \end{aligned}$$

In Analogie hierzu werden nun komplexe Kurvenintegrale wie folgt definiert

Definition (6.4) Ist $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow D$ ein (stetiger) stückweiser C^1 -Weg, so heißt

$$\int_{\mathbf{c}} f(z) dz := \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \dot{\mathbf{c}}(t) dt \quad (6.5)$$

das *komplexe Kurvenintegral von f längs der Kurve \mathbf{c}* .

Man beachte, dass in der rechten Seite von (6.5) die komplexe Multiplikation steht, so dass (6.5) gemäß (6.2) auszuwerten ist.

94

Bei geschlossenen Kurven schreibt man auch $\oint_{\mathbf{c}} f(z) dz$.

Beispiele (6.6)

a) $\oint_{\mathbf{c}} z dz, \quad \mathbf{c}(t) = r e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

$$\oint_{\mathbf{c}} z dz = \int_0^{2\pi} r e^{it} (r i e^{it}) dt = i r^2 \int_0^{2\pi} e^{2it} dt = \frac{r^2}{2} [e^{2it}]_0^{2\pi} = 0.$$

b) $\oint_{\mathbf{c}} \bar{z} dz, \quad \mathbf{c}(t) = r e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

$$\oint_{\mathbf{c}} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} r e^{-it} (r i e^{it}) dt = i r^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i r^2.$$

c) $\oint_{\mathbf{c}} (1/z) dz, \quad \mathbf{c}(t) = r e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

$$\oint_{\mathbf{c}} (1/z) dz = \oint_{\mathbf{c}} (\bar{z}/|z|^2) dz = (1/r^2) \oint_{\mathbf{c}} \bar{z} dz = 2\pi i.$$

95

d) $\oint_{\mathbf{c}} (z - z_0)^n dz, \quad \mathbf{c}(t) = z_0 + r e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

$$\oint_{\mathbf{c}} (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (r e^{it})^n (r i e^{it}) dt = i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Damit gilt

$$\oint_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{für } n = -1, \\ 0, & \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}. \end{cases} \quad (6.7)$$

e) $\oint_{\mathbf{c}} z dz, \quad \mathbf{c}(t) = e^{(1+i)t}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

$$\oint_{\mathbf{c}} z dz = (1+i) \int_0^{2\pi} e^{2(1+i)t} dt = \frac{1}{2} e^{2(i+1)t} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} [e^{4\pi} - 1].$$

96

Elementare Eigenschaften (6.8)

a) Das komplexe Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} f(z) dz$ ist *parametrisierungs-invariant*, d.h. für eine bijektive C^1 -Transformation $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ mit $h'(\tau) > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c} \circ h} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{c}(h(\tau))) \frac{d}{d\tau} (\mathbf{c} \circ h)(\tau) d\tau \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{c}(h(\tau))) \dot{\mathbf{c}}(h(\tau)) h'(\tau) d\tau \\ &= \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \dot{\mathbf{c}}(t) dt = \int_{\mathbf{c}} f(z) dz. \end{aligned}$$

b) Änderung der Durchlaufrichtung:

$$\int_{-\mathbf{c}} f(z) dz = - \int_{\mathbf{c}} f(z) dz$$

dabei ist $(-\mathbf{c})(t) := \mathbf{c}(b + t(a - b))$, $0 \leq t \leq 1$.

97

c) Darstellung als Riemann-Summe:

$$\int_{\mathbf{c}} f(z) dz = \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\mathbf{c}(\tau_j)) (\mathbf{c}(t_{j+1}) - \mathbf{c}(t_j)).$$

d) Linearität:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} (f(z) + g(z)) dz &= \int_{\mathbf{c}} f(z) dz + \int_{\mathbf{c}} g(z) dz \\ \int_{\mathbf{c}} \alpha f(z) dz &= \alpha \int_{\mathbf{c}} f(z) dz; \quad \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

e) Additivität bzgl. des Integrationsweges:

$$\int_{\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2} f(z) dz = \int_{\mathbf{c}_1} f(z) dz + \int_{\mathbf{c}_2} f(z) dz,$$

wobei $\mathbf{c}_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathbf{c}_2(0) = \mathbf{c}_1(1)$, $(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)(t) := \mathbf{c}_1(2t)$, $0 \leq t \leq 0.5$, und $(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)(t) := \mathbf{c}_2(2t - 1)$, $0.5 \leq t \leq 1$.

98

f) Abschätzung:

$$\left| \int_{\mathbf{c}} f(z) dz \right| \leq \left(\sup_{z \in \mathbf{c}[a,b]} |f(z)| \right) \int_a^b |\dot{\mathbf{c}}(t)| dt.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{c}} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \dot{\mathbf{c}}(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\mathbf{c}(t))| |\dot{\mathbf{c}}(t)| dt \\ &\leq \left(\sup_{z \in \mathbf{c}[a,b]} |f(z)| \right) \int_a^b |\dot{\mathbf{c}}(t)| dt. \quad \square \end{aligned}$$

Satz (6.9)

Ist $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ eine Reihe stetiger Funktionen $f_k : D \rightarrow \mathbb{C}$, die auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ *gleichmäßig* konvergiert und ist $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow D$ ein stkw. C^1 -Weg, so gilt

$$\int_{\mathbf{c}} f(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbf{c}} f_k(z) dz.$$

99

Beweis:

Als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen ist f stetig (vgl. Ansorge, Oberle, Satz (11.1.3)) und somit auch integrierbar. Es folgt

$$\int_{\mathbf{c}} f(z) dz - \sum_{k=0}^n \int_{\mathbf{c}} f_k(z) dz = \int_{\mathbf{c}} R_n(z) dz,$$

wobei aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N, z \in D : |R_n(z)| < \varepsilon.$$

Mit (6.8 f) folgt für $n \geq N(\varepsilon)$:

$$\left| \int_{\mathbf{c}} R_n(z) dz \right| \leq \varepsilon L(\mathbf{c}),$$

wobei $L(\mathbf{c}) = \int_a^b |\dot{\mathbf{c}}(t)| dt$ die Länge der Kurve \mathbf{c} bezeichnet.

Somit folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{c}} R_n(z) dz = 0$. □

100

Beispiel (6.10): Sei $|z_0| > r > 0$ und $c(t) := r e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
Dann folgt

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=r} \frac{dz}{z - z_0} &= -\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \frac{dz}{1 - (z/z_0)} \\ &= -\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^k} z^k dz \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^{k+1}} \oint_{|z|=r} z^k dz = 0. \end{aligned}$$

Erläuterung: 1. Gln.: Linearität, 2. Gln.: Geometrische Reihe, 3. Gln.: Satz (6.9), 4. Gln. (6.7).

101

Definition (6.11) Eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k}$$

heißt *Laurent-Reihe* zum Entwicklungspunkt z_0 , benannt nach *Pierre Alphonse Laurent (1813-1854)*.

Eine Laurent-Reihe ist lokal gleichmäßig und absolut konvergent in einem *Kreisring*

$$K_{r_1, r_2}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r_1 < |z - z_0| < r_2 \leq \infty\}. \quad (6.12)$$

Die *Konvergenzradien* r_1 und r_2 ergeben sich aus den Konvergenzradien der beteiligten Potenzreihen zu

$$r_2 = \left[\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right]^{-1}, \quad r_1 = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|}, \quad (6.13)$$

vgl. Ansorge, Oberle, Satz (11.2.3).

102

Satz (6.14)

Ist die Funktion f auf einem Kreisring $K_{r_1, r_2}(z_0)$ durch eine Laurent-Reihe gegeben,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad r_1 < |z - z_0| < r_2,$$

so gilt für $r_1 < r < r_2$ und $c(t) : z_0 + r e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}.$$

Beweis: Wir verwenden (6.7). Wegen der gleichmäßigen Konvergenz lassen sich Integration und Summation vertauschen

$$\oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \oint_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^k dz = 2\pi i a_{-1}. \quad \square$$