5. Konforme Abbildungen

Satz (5.1) (über konforme Abbildungen)

a) Ist $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ mit $f'(z) \neq 0$, $\forall\, z \in D$, so gelten die folgenden lokalen Eigenschaften bei $z_0 \in D$:

- Der Winkel zwischen zwei sich in z_0 schneidenden Kurven bleibt bei der Transformation $w = f(z)$ erhalten. Ebenso der Umlaufsinn.
- $|f'(z_0)|$ ist die für alle von z_0 ausgehenden Richtungen gemeinsame Längenverzerrung. Insbesondere bleiben Längenverhältnisse im Kleinen erhalten.

Abbildungen mit diesen beiden Eigenschaften heißen *konforme Abbildungen*.

b) Ist $w = f(z)$ eine konforme Abbildung und als Transformation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so ist f auch komplex differenzierbar und es gilt $f'(z) \neq 0$.

Beweis: (nur zu a)) Sind $\mathbf{c}$ und $\tilde{\mathbf{c}}$ zwei C^1-Kurven in D mit $\mathbf{c}(0) = \tilde{\mathbf{c}}(0) = z_0$, so gilt für den Winkel zwischen den Tangenten an $\mathbf{c}$ und $\tilde{\mathbf{c}}$

$$\gamma \;=\; \sphericalangle(\dot{\mathbf{c}}(0), \dot{\tilde{\mathbf{c}}}(0)) \;=\; \arg(\dot{\mathbf{c}}(0)) - \arg(\dot{\tilde{\mathbf{c}}}(0)).$$

Für die Bildkurven $f \circ \mathbf{c}$ und $f \circ \tilde{\mathbf{c}}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma} \;&=\; \sphericalangle(f'(z_0)\,\dot{\mathbf{c}}(0), f'(z_0)\,\dot{\tilde{\mathbf{c}}}(0)) \\
&=\; \arg(f'(z_0)\,\dot{\mathbf{c}}(0)) - \arg(f'(z_0)\,\dot{\tilde{\mathbf{c}}}(0)) \\
&=\; \arg(f'(z_0)) + \arg(\dot{\mathbf{c}}(0)) - \arg(f'(z_0)) - \arg(\dot{\tilde{\mathbf{c}}}(0)) \\
&=\; \gamma,
\end{aligned}$$

$$\left\| \frac{d}{dt} (f \circ \mathbf{c})(0) \right\| = \left| f'(z_0)\, \dot{\mathbf{c}}(0) \right| = |f'(z_0)|\, \|\dot{\mathbf{c}}(0)\| \qquad \square$$

Definition (5.2) Es sei $w = f(z)$ eine bijektive und konforme Transformation $f : D \to W$ zweier Gebiete D und W in $\mathbb{C}$.
Zu einer vorgegebenen C^2–Funktion $\Phi : D \to \mathbb{R}$ setzen wir $\Psi := \Phi \circ f^{-1}$. Ψ heißt die konforme Transformation von Φ mittels f.

Anwendung: Gesucht ist eine Potentialfunktion Φ (Lösung von $\Delta\Phi = 0$) auf einem physikalischen Bereich D. Kennt man nun eine konforme Transformation f des physikalischen Bereichs auf einen Modellbereich W und eine Potentialfunktion Ψ auf W, so ist durch $\Phi := \Psi \circ f$ eine gesuchte Potentialfunktion gegeben.

$$\begin{array}{ccc} D & \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} & W \\ \Phi \big\downarrow & & \big\downarrow \Psi \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

$\Phi(z)$: gesuchte Potentialfunktion, D: physikalischer Bereich, W: Modellbereich, $\Psi(w)$: bekannte Potentialfunktion

Definition (5.3) Zu einer C^1-Funktion $\Phi : D \to \mathbb{R}$ heißt

$$\operatorname{grad} \Phi(z) := \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

der komplexe Gradient von Φ.

Satz (5.4) Unter den obigen Voraussetzungen an Φ, Ψ und f und entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gelten

a) $\operatorname{grad}\Phi(z) = \operatorname{grad}\Psi(f(z)) \cdot \overline{f'(z)}$

b) $\Delta\Phi(z) = \Delta\Psi(f(z)) \cdot |f'(z)|^2$

Beweis: **zu a):** Aus $\Phi(x,y) = \Psi(u(x,y),v(x,y))$ folgt

$$\Phi_x = \Psi_u\, u_x + \Psi_v\, v_x, \qquad \Phi_y = \Psi_u\, u_y + \Psi_v\, v_y,$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \operatorname{grad}\Phi &= (\Psi_u\, u_x + \Psi_v\, v_x) + i\,(\Psi_u\, u_y + \Psi_v\, v_y) \\
&= \Psi_u\,(u_x + iu_y) + \Psi_v\,(v_x + iv_y) \\
&= \Psi_u\,(u_x - iv_x) + i\,\Psi_v\,(u_x - iv_x) \\
&= \operatorname{grad}\Psi(w) \cdot \overline{f'(z)}.
\end{aligned}$$

zu b): Nochmalige Differentiation liefert

$$\begin{aligned}
\Phi_{x\,x} &= \Psi_{u\,u}\,u_x^2 + 2\,\Psi_{u\,v}\,u_x\,v_x + \Psi_{v\,v}\,v_x^2 + \Psi_u\,u_{x\,x} + \Psi_v\,v_{x\,x} \\
\Phi_{y\,y} &= \Psi_{u\,u}\,u_y^2 + 2\,\Psi_{u\,v}\,u_y\,v_y + \Psi_{v\,v}\,v_y^2 + \Psi_u\,u_{y\,y} + \Psi_v\,v_{y\,y}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi &= \Psi_{u\,u}\,[u_x^2 + u_y^2] + 2\,\Psi u\,v[u_x\,v_x + u_y\,v_y] + \Psi_{v\,v}\,[v_x^2 + v_y^2] \\
&\quad + \Psi_u\,\Delta u + \Psi_v\,\Delta v.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten nun $u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 = |f'(z)|^2$, $u_x v_x + u_y v_y = 0$, sowie $\Delta u = \Delta v = 0$.

Damit folgt aus der obigen Gleichung $\Delta\Phi = \Delta\Psi\,|f'(z)|^2$. $\square$

Anwendung I: RWA für die 2-dim. Laplace-Gleichung

Zu lösen sei das Dirichlet-Randwertproblem

$$\Delta u = 0, \ z \in D, \qquad u(z) = u_0(z), \ z \in \partial D, \tag{5.5}$$

für ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet $D \subset \mathbb{C}$.

Wir nehmen an, dass sich $\overline{D}$ (einschließlich Rand) bijektiv und stetig auf $\overline{K}_1(0)$ abbilden lässt vermöge einer Transformation $f : \overline{D} \to \overline{K}_1(0)$, die auf D selbst konform ist. Mit $\Psi := u \circ f^{-1}$ geht das physikalische Problem dann über in das Modellproblem

$$\Delta \Psi(w) = 0, \ |w| < 1, \qquad \Psi(w) = \Psi_0(w), \ |w| = 1. \tag{5.6}$$

Mit der Fourierschen Methode lässt sich die Lösung des Modellproblems explizit angeben (vgl. Vorlesung Diff.gln. II).
In komplexer Schreibweise (Polarkoordinaten) gilt

$$\Psi(r\,\mathrm{e}^{i\varphi}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k\, r^{|k|}\, \mathrm{e}^{i\,k\,\varphi}, \tag{5.7}$$

wobei die γ_k die (komplexen) Fourier-Koeffizienten der transformierten Randfunktion $\Psi_0(\mathrm{e}^{i\varphi}) := u_0(f^{-1}(\mathrm{e}^{i\varphi}))$ sind.

Die Rücktransformation ergibt

$$u(z) = \Psi(f(z)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k\, |f(z)|^{|k|}\, \mathrm{e}^{i\,k\,\arg\,(f(z))}. \tag{5.8}$$

Anwendung II: Ebene Potentialströmung

Wir betrachten eine stationäre, wirbel- und quellenfreie, ebene Umströmung eines Zylinders (mit z-Achse als Symmetrieachse und Querschnitt $K \subset \mathbb{C}$). Bezeichnet $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \setminus K \to \mathbb{R}^2$ das Geschwindigkeitsfeld der Strömung, so gelten

$$\begin{aligned} \text{(a)} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{u}(x,y) &= \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \\ \text{(b)} \qquad \operatorname{div} \mathbf{u}(x,y) &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Wir können annehmen, dass $D := \mathbb{R}^2 \setminus K$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet im $\mathbb{R}^2$ ist. Dann folgt aus (5.9) die Existenz zweier Potentiale, nämlich

$$\text{(a)} \quad U : D \to \mathbb{R}, \quad \nabla U = -\mathbf{u}(x,y), \quad \text{Geschwindigkeitspotential},$$

$$\text{(b)} \quad V : D \to \mathbb{R}, \quad \nabla V = (u_2, -u_1)^{\mathsf{T}}, \quad \text{Stromfunktion}. \tag{5.10}$$

Die Stromlinien sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = u_1, \quad \dot{y} = u_2$. Damit sind die Stromlinien gegeben durch

$$V(x,y) = \text{const.} \tag{5.11}$$

Denn: $\dfrac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = V_x \dot{x} + V_y \dot{y} = u_2 u_1 - u_1 u_2 = 0.$

Die Stromlinien sind also die Höhenlinien der Stromfunktion ψ.

Definition (5.12) Die komplexe Funktion $\Phi := U + iV$ heißt das komplexe Strömungspotential.

Φ ist eine auf D holomorphe Funktion, da die Cauchy- Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind

$$U_x - V_y = -u_1 - (-u_1) = 0, \quad U_y + V_x = -u_2 + u_2 = 0.$$

Man kann das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}$ der Strömung auch folgendermaßen aus dem komplexen Strömungspotential zurück erhalten:

$$\mathbf{u} = u_1 + i\, u_2 = -\overline{\Phi'(z)}, \tag{5.13}$$

denn: $\Phi'(z) = U_x + i V_x = -u_1 + i\, u_2.$

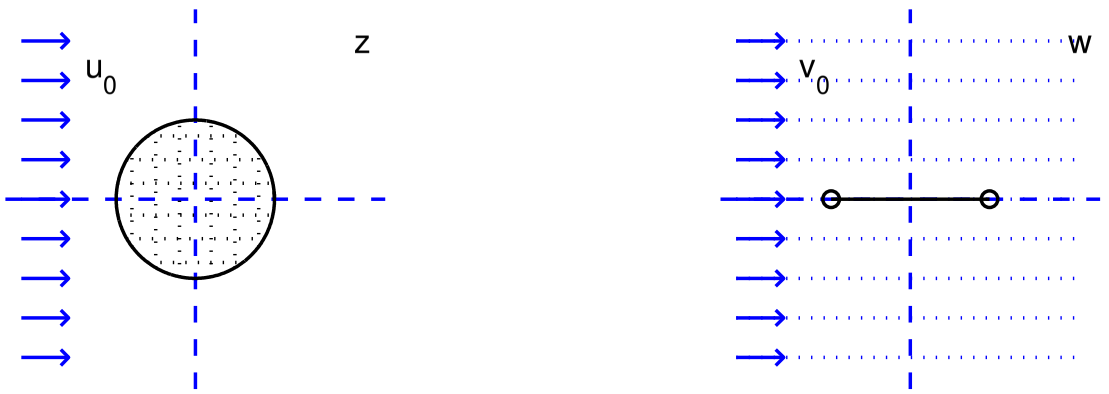
Idee zur Berechnung von Φ: Durch konforme Transformation werde $D = \mathbb{C} \setminus K$ in ein einfacheres Gebiet transformiert, für das man das komplexe Strömungspotential kennt.

Beispiel (5.14) Umströmung eines Kreiszylinders.

Wir untersuchen die ebene Umströmung eine Kreiszylinders mit der Querschnittsfläche $\overline{K}_R(0)$, $R > 0$. Das Geschwindigkeitsfeld im Unendlichen sei $\mathbf{u}(\infty) = u_0 > 0$. Als konforme Transformation wählen wir die Joukowski-Funktion, vgl. (2.8)

$$w \;=\; \xi + i\,\eta \;=\; f(z) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z}\right)$$

Hierdurch wird $|z| = R$ auf die (doppelt durchlaufene) Strecke $[-1, 1]$ abgebildet und das Gebiet $D = \mathbb{C}\setminus\overline{K}_R(0)$ wird konform auf $\widetilde{D} = \mathbb{C}\setminus[-1, 1]$ transformiert. Die Strömung wird im Modellbereich also durch das Hindernis nicht beeinflusst!



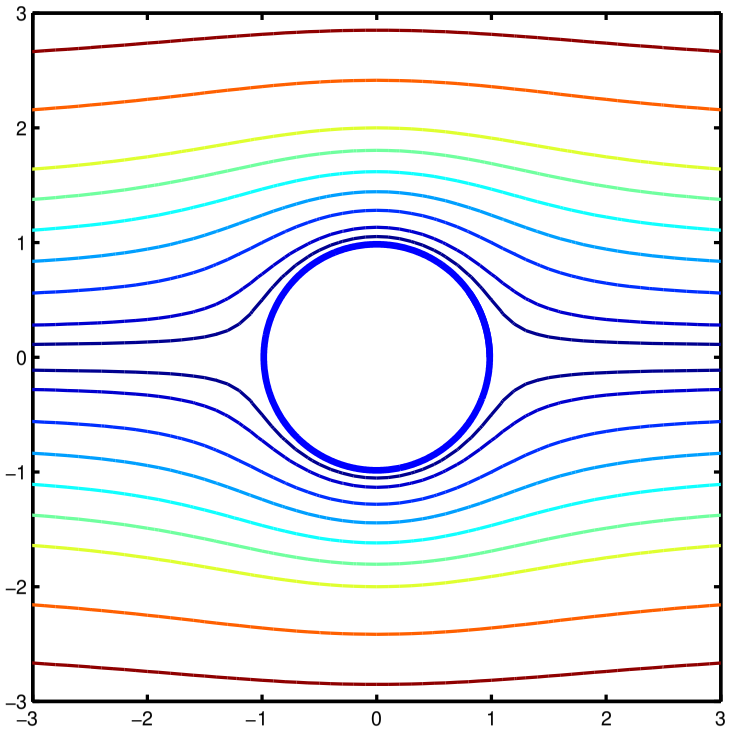
Wegen (5.10) lautet das komplexe Strömungspotential im Bildraum $\widetilde{\Phi}(w) = -v_0\, w$, $w \in \mathbb{C}$, wobei $v_0 > 0$ die (konstante) Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen ist. Die Rücktransformation ergibt das Strömungspotential des Ausgangsproblems

$$\Phi(z) \;=\; \widetilde{\Phi}(f(z)) \;=\; -\,\frac{v_0}{2}\left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z}\right)$$

und somit nach (5.13) $\mathbf{u}(z) = -\overline{\Phi'(z)} = \dfrac{v_0}{2}\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{R}{\overline{z}^2}\right)$.

Zu Skalierung: Für $z \to \infty$ ergibt sich $\mathbf{u}(\infty) = v_0/(2\,R) = u_0$ und somit $v_0 = 2\,R\,u_0$. Insgesamt erhalten wir also

- Kompl. Strömungspotential: $\Phi(z) = -\,u_0\left(z + \dfrac{R^2}{z}\right)$
- Geschwindigkeitspotential: $U(z) = -\,u_0\left(x + \dfrac{R^2\,x}{x^2+y^2}\right)$
- Stromfunktion: $V(z) = -\,u_0\left(y - \dfrac{R^2\,y}{x^2+y^2}\right)$
- Geschwindigkeitsfeld: $\mathbf{u}(z) = u_0\left(1 - \dfrac{R^2}{\overline{z}^2}\right)$



Umströmung eines Kreiszylinders

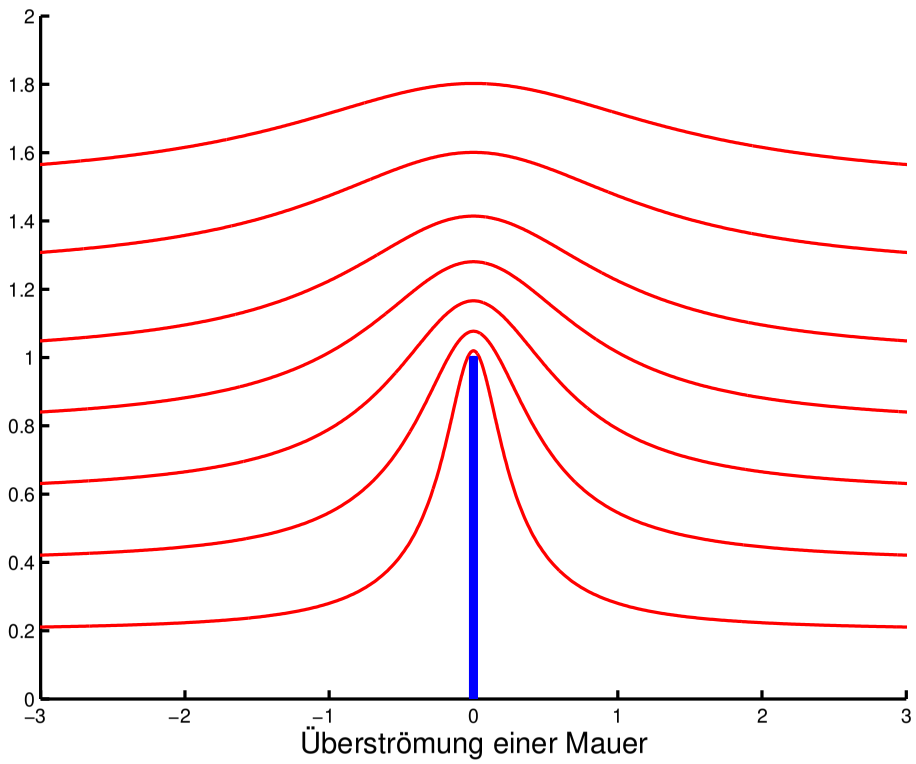
Beispiel (5.15) Überströmung einer Mauer.

Zur Berechnung der Stromlinien für die nichtturbulente Überströmung einer Mauer lässt sich die folgende konforme Gebietstransformation verwenden $w = f(z) = \sqrt{z^2+1}$. f bildet (bei geeigneter Wahl der Wurzel) die zwischen $z = 0$ und $z = i$ geschlitzte obere Halbebene

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\,(z) > 0, \ z \notin [0,1]\,i\}$$

in die obere Halbebene $\mathrm{Im}\,(w) > 0$ (ohne Hindernis) ab.

Mit Hilfe der Umkehrabbildung $z = f^{-1}(w) = i\sqrt{1-w^2}$ lassen sich dann unmittelbar die Urbilder der Stromlinien des Modellproblems $\mathrm{Im}\,(w) = \text{const.}$ zeichnen.



Anwendung III: Probleme der Elektrostatik

Zu berechnen sei die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}(x,y)$ in einem ladungsfreien Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, wobei das Potential $U(x,y)$ mit $\mathbf{E} = -\nabla U$ am Rand des Gebietes D vorgegeben ist. Da $\mathbf{E}$ auf D divergenzfrei ist, folgt insbesondere $\Delta U = 0$, d.h. U ist Lösung eines Dirichlet-Problems

$$\Delta U \;=\; 0,\;\; z = (x,y) \in D, \qquad U(z) \;=\; U_0(z),\;\; z \in \partial D. \quad (5.16)$$

Nach Früherem ist U damit Realteil einer auf D holomorphen Funktion $\Phi(z) = U(z) + i\,V(z)$, dem so genannten komplexen Potential.

Wieder heißt V die Stromfunktion, $U(x,y) = \text{const.}$ beschreibt die Äquipotentiallinien, $V(x,y) = \text{const.}$ die Feldlinien.

Ebenfalls kann man das elektrische Feld wieder direkt aus dem komplexen Potential gewinnen vermöge

$$\mathbf{E} \;=\; -\big(U_x + i\,U_y\big) \;=\; -\big(U_x - i\,V_x\big) \;=\; -\overline{\Phi'(z)}. \quad (5.17)$$

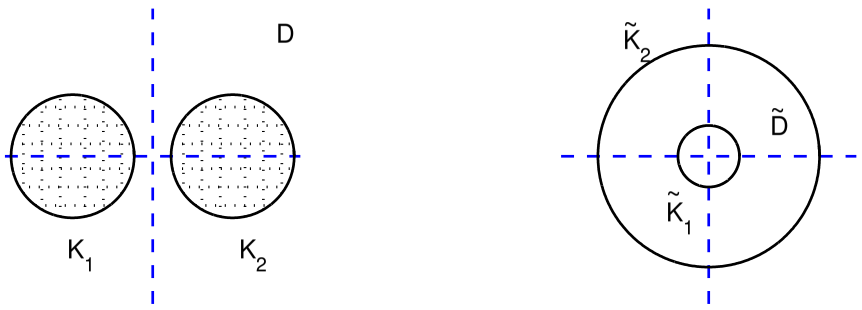
Die Grundidee lässt sich übertragen: Man transformiere das Gebiet D vermöge einer konformen Abbildung (bijektiv) in ein einfacheres Gebiet $\widetilde{D}$ und löse das Modellproblem

$$\Delta\widetilde{U}(w) \;=\; 0,\;\; w \in \widetilde{D}, \qquad \widetilde{U}(w) \;=\; \widetilde{U}_0(w),\;\; w \in \partial\widetilde{D}.$$

Dabei ist $\widetilde{U}_0 := U_0 \circ f^{-1}$ die transformierte Randfunktion.

Anschließend transformiere man die Lösung zurück: $U := \widetilde{U} \circ f$.

Beispiel (5.18) Wir bestimmen die Feldlinien in Außenraum von zwei stromdurchflossenen Leitern mit Querschnitten K_1 und K_2.



Sind a, b mit $0 < a < b$ bzw. $-a$ und $-b$ die Schnittpunkte der Querschnittskreise mit der x-Achse, so wird durch

$$w \;=\; f(z) \;=\; \frac{p+z}{p-z}, \qquad p := \sqrt{a\,b},$$

eine Möbius-Transformation beschrieben, die D konform auf den Kreisring $\widetilde{D} := \{w :\; 1/\rho < |w| < \rho\}$, $\rho := (\sqrt{a}+\sqrt{b})/(\sqrt{b}-\sqrt{a})$, abbildet, vgl. Beispiel (3.12).

Nehmen wir an, dass die Randfunktionen im physikalischen Problem konstant sind

$$U(z) \;=\; -U_0,\;\; z \in K_1, \qquad U(z) \;=\; U_0,\;\; z \in K_2,$$

so erhalten wir das folgende Modellproblem

$$\begin{aligned} &\Delta\widetilde{U} \;=\; 0, \quad w \in \widetilde{D}, \\ &\widetilde{U}(w) \;=\; -U_0,\;\; w \in \widetilde{K}_1, \quad \widetilde{U}(w) \;=\; U_0,\;\; w \in \widetilde{K}_2. \end{aligned}$$

Aufgrund der Ursprungssymmetrie des Modellproblems kann man annehmen, dass $\widetilde{U} = \widetilde{U}(r)$ nur vom Abstand r zum Ursprung abhängt. Damit erhalten wir eine gewöhnliche Randwertaufgabe

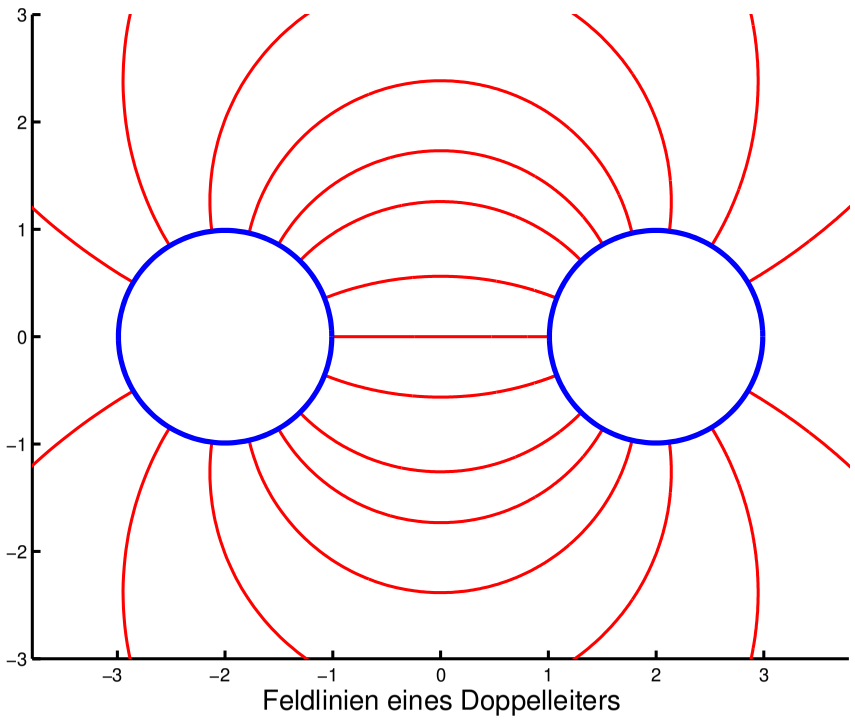
$$\begin{aligned} &\widetilde{U}''(r) + \frac{1}{r}\,\widetilde{U}(r) \;=\; 0, \\ &\widetilde{U}(1/\rho) \;=\; -U_0, \quad \widetilde{U}(\rho) \;=\; U_0. \end{aligned}$$

Die Lösung lautet $\widetilde{U}(r) \;=\; \dfrac{U_0}{\ln\rho}\,\ln r, \;\; 1/\rho \le r \le \rho.$

Die Rücktransformation ergibt schließlich

$$U(z) \;=\; \frac{U_0}{\ln \rho}\,\ln|f(z)|, \qquad f(z) \;=\; \frac{p+z}{p-z},$$
$$p \;=\; \sqrt{a\,b}, \qquad \rho \;=\; \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}.$$

Zur Darstellung die Feldlinien genügt es, die Feldlinien des Modellproblems $w = r\,\mathrm{e}^{i\phi}$, $1/\rho \le r \le \rho$, vermöge $z = f^{-1}(w)$ zurück zu transformieren.



Feldlinien eines Doppelleiters