4. Komplexe Differentiation

Definition (4.1) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion, $D \subset \mathbb{C}$. Dann heißt f in $z_0 \in D^0$ komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(z_0)$, falls gilt

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{4.2}$$

Ist f in jedem Punkt eines Gebietes $D \subset \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so heißt f auch holomorph (analytisch, regulär) auf D.

Bemerkungen

- Die Grenzwertbildung in (4.2) erfolgt im Komplexen, d.h. die Annäherung von z an z_0 kann in beliebiger Richtung erfolgen.

- Die Division in (4.2) ist natürlich die Division komplexer Zahlen.
- Dass diese an sich banalen Bemerkungen doch restriktive Auswirkungen auf die Menge der holomorphen Funktionen haben, zeigt beispielsweise die folgende Aussage:

  Ist f reellwertig und holomorph auf einem Gebiet D, so folgt $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$.

  Begründung: Wählt man z.B. $z_n := z_0 + 1/n$, so folgt, dass $f'(z_0)$ reell ist. Wählt man aber $z_n := z_0 + i/n$, so folgt, dass $f'(z_0)$ rein imaginär ist. Da Beides zugleich gelten muss, ist also $f'(z_0) = 0$. $\square$

Umformung von (4.2)

$$(4.2) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)\,(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\,(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(z) = f(z_0) + \gamma\,(z - z_0) + \varepsilon(z)\,|z - z_0|; \;\; \varepsilon(z) \to 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u(z) = u(z_0) + \mathrm{Re}\,(\gamma)\,(x - x_0) - \mathrm{Im}\,(\gamma)\,(y - y_0) + \mathrm{Re}\,(\varepsilon(z))\,|z - z_0|$$

$$v(z) = v(z_0) + \mathrm{Im}\,(\gamma)\,(x - x_0) + \mathrm{Re}\,(\gamma)\,(y - y_0) + \mathrm{Im}\,(\varepsilon(z))\,|z - z_0|$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(z_0) \\ v(z_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\gamma & -\mathrm{Im}\,\gamma \\ \mathrm{Im}\,\gamma & \mathrm{Re}\,\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + |z - z_0| \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(\varepsilon(z)) \\ \mathrm{Im}\,(\varepsilon(z)) \end{pmatrix}$$

Damit ist der folgende Zusammenhang gezeigt:

Satz (4.3)

f ist genau dann komplex differenzierbar in $z_0 \in D$, wenn f als Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in z_0 total-differenzierbar ist und für die Jacobi-Matrix

$$Jf(z_0) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix}$$

die folgenden Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten

$$u_x(z_0) = v_y(z_0), \quad u_y(z_0) = -\,v_x(z_0)\,. \tag{4.4}$$

In diesem Fall gilt

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + i\,v_x(z_0)\,. \tag{4.5}$$

Folgerung (4.6)

Ist f holomorph auf einem Gebiet D, so gilt

$$\Big(\forall\, z \in D\, :\; f'(z) = 0\Big) \quad \Rightarrow \quad f(z) = \text{const.}$$

Beweis: f ist nach (4.3) total differenzierbar und die Jacobi-Matrix verschwindet auf D. □

Satz (4.7)

- Ist f eine C^2-Funktion und holomorph auf D, so erfüllen Real- und Imaginärteil die Potentialgleichung $\Delta u = \Delta v = 0$.
- Umgekehrt: Erfüllt eine reellwertige C^2-Funktion u die Potentialgleichung auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet D, so existiert eine differenzierbare Funktion v, so dass $f := u + i\, v$ auf D holomorph ist.

Beweis: **zu a):** Mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial}{\partial x} u_x + \frac{\partial}{\partial y} u_y = \frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x = 0\\ \Delta v &= \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y = -\frac{\partial}{\partial x} u_y + \frac{\partial}{\partial y} u_x = 0\,.\end{aligned}$$

zu b): Sei u eine C^2-Funktion mit $\Delta u = 0$. Gesucht ist nun eine differenzierbare Funktion v, so dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $v_x = -u_y$ und $v_y = u_x$ erfüllt sind. Damit ist eine Stammfunktion v für das Vektorfeld $V(x,y) := (-u_y, u_x)^\top$ gesucht. Die Integrabilitätsbedingung $V_{2\,x} - V_{1\,y} = \Delta u = 0$ ist nach Voraussetzung erfüllt. Da D einfach zusammenhängt, ist die Existenz eines Potentials v gesichert; vgl. Ansorge, Oberle, Satz (19.2.24). □

Differentiationsregeln (4.8)

a)

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(z) &= f'(z) \pm g'(z)\\ (f\, g)'(z) &= f'(z)\, g(z) + f(z)\, g'(z)\\ (f/g)'(z) &= \left(f'(z)\, g(z) - f(z)\, g'(z)\right)/g(z)^2\end{aligned}$$

b) Ist f komplex differenzierbar in z_0 und g komplex differenzierbar in $w_0 := f(z_0)$, so gilt die Kettenregel:

$$(g \circ f)'(z_0) \;=\; g'(f(z_0))\, f'(z_0).$$

c) Ist f holomorph mit $f'(z_0) \neq 0$, so ist f lokal bei z_0 bijektiv und die Umkehrabbildung ist ebenfalls holomorph, Für die Ableitung in $w_0 := f(z_0)$ gilt:

$$(f^{-1})'(w_0) \;=\; \frac{1}{f'(z_0)}.$$

d) Ist f holomorph auf dem Gebiet D und ist $c : [\alpha, \beta] \to G$ eine C^1-Kurve, so gilt die Kettenregel:

$$\frac{d}{dt}[f(c(t))] \;=\; f'(c(t))\, c'(t).$$

Beweis:

zu a), b), c): Die Beweise erfolgen analog zum reellen Fall; vgl. Ansorge, Oberle: Satz (9.2.8).

zu d): Anwendung der reellen Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[f(c(t))] &= \frac{d}{dt}\big[u(c(t)) \;+\; i\, v(c(t))\big] \\ &= (u_x \dot{c}_1 \;+\; u_y \dot{c}_2) \;+\; i\,(v_x \dot{c}_1 \;+\; v_y \dot{c}_2)\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite berechnet man

$$\begin{aligned}f'(c(t))\, \dot{c}(t) &= (u_x \;+ i\; v_x)\,(\dot{c}_1 \;+\; i\, \dot{c}_2) \\ &= (u_x \dot{c}_1 \;-\; v_x \dot{c}_2) \;+\; i\,(v_x \dot{c}_1 \;+\; u_x \dot{c}_2)\end{aligned}$$

Die Gleichheit gilt nun aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. $\square$

Beispiele (4.9)

a) Jede konstante Funktion $f(z) = c$ ist holomorph mit $f'(z) = 0$. Die Funktion $f(z) = z$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $f'(z) = 1$.

Hieraus folgt, dass auch alle *Polynome* in z holomorph auf $\mathbb{C}$ sind. Genauer gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k\right)'(z_0) \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k\, k\, z_0^{k-1}\,.$$

Weiter sind damit auch *rationale Funktionen* (Quotienten von Polynomen in z) an allen Stellen komplex differenzierbar, an denen der Nenner nicht verschwindet.

b) Für die Exponentialfunktion $f(z) = \mathrm{e}^z \;=\; \mathrm{e}^x\,(\cos y + i \sin y)$ folgt

$$u_x \;=\; v_y \;=\; \mathrm{e}^x\,\cos y, \quad u_y \;=\; -v_x \;=\; -\mathrm{e}^x\,\sin y$$

Damit ist die Exponentialfunktion holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $f'(z) = u_x + i\,v_x = \mathrm{e}^z$.

c) Die trigonometrischen Funktionen sin und cos sind ebenfalls auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, da gilt

$$\sin z \;=\; \frac{1}{2\,i}\left(\mathrm{e}^{i\,z} \,-\, \mathrm{e}^{-i\,z}\right), \quad \cos z \;=\; \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{i\,z} \,+\, \mathrm{e}^{-i\,z}\right).$$

Für die Ableitungen ergibt sich wie im Reellen:

$$\sin' z \;=\; \cos z\,, \quad \cos' z \;=\; -\,\sin z.$$

d) Der *k-te Zweig des Logarithmus* ($k \in \mathbb{Z}$) wird definiert durch

$$\ln_k \;:\; D \,\to\, W_k \,\subset\, \mathbb{C}, \quad \ln_k(z) \;:=\; \ln|z| \,+\, i\,(\arg z + 2\,k\,\pi).$$

Dabei ist $D := \mathbb{C} \setminus \{x|\, x \le 0\}$ und $W_k := \{w|\,(2k-1)\pi < \mathrm{Im}\, z < (2k+1)\pi\}$. Der k-te Zweig des Logarithmus ist holomorph auf D (als Umkehrfunktion von exp) und es gilt $\ln_k'(z) \;=\; 1/z$.

Satz (4.10) Durch *Potenzreihen* erklärte Funktionen

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

sind auf ihren Konvergenzkreis $K_r(z_0)$, r: Konvergenzradius, holomorph. Ihre Ableitungen lassen sich durch gliedweise Differentiation berechnen:

$$f'(z) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, k\, (z-z_0)^{k-1}.$$

Beweis: Sei o.E.d.A. $z_0 = 0$. Nach Ansorge, Oberle (11.2.3) konvergieren beide Potenzreihen $f(z)$ und $f'(z)$ im Konvergenzkreis $K_r(0)$ und dies auf jeder kleineren, kompakten Kreisscheibe $\overline{K}_\rho(0)$ sogar gleichmäßig und absolut.
Sei nun $z \in K_r(0)$ und $|z| < \rho < r$. Für $|h| < \rho' := \rho - |z|$ ist dann auch $z + h \in \overline{K}_\rho(0)$.

Wir zeigen direkt, dass $|(f(z+h) - f(z))/h \;-\; f'(z)|$ für $h \to 0$ gegen Null konvergiert. Einsetzen der Reihen in diesen Ausdruck und Anwendung der Dreiecksungleichung und der binomischen Formel ergibt

$$\begin{aligned} \Big|\,\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z)\Big| \;&=\; \Big|\,\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big(\frac{(z+h)^k - z^k}{h} - kz^{k-1}\Big)\Big| \\ &\le\; \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \big|(z+h)^{k-1} + z\,(z+h)^{k-2} + \ldots + z^{k-1} - k\,z^{k-1}\big| \end{aligned}$$

Jeder Summand dieser Reihe lässt sich weiter nach oben abschätzen durch $|a_k|\,2\,k\,\rho^{k-1}$.

Da die Reihe $\sum_{k\ge 1} a_k\, k\, z^{k-1}$ in $\overline{K}_\rho(0)$ aber absolut konvergiert, also $\sum_{k\ge 1} |a_k| k \rho^{k-1} \;<\; \infty$ gilt, gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $h \in K_{\rho'}(0)$

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| \big|(z+h)^{k-1} + z\,(z+h)^{k-2} + \ldots + z^{k-1} - k\,z^{k-1}\big| \;<\; \varepsilon/2\,.$$

Die verbleibende endliche Summe

$$\Phi(h) \;:=\; \sum_{k=1}^{n_0} |a_k| \big|(z+h)^{k-1} \,+\, z\,(z+h)^{k-2} \,+\ldots+\, z^{k-1} \,-\, k\,z^{k-1}\big|$$

ist nun aber eine stetige Funktion in h, die für $h = 0$ verschwindet. Es gibt daher ein positves $\rho'' = \rho''(\varepsilon) \leq \rho'$, so dass $\Phi(h) < \varepsilon/2$ für alle $h \in K_{\rho''}(0)$.

Insgesamt ist damit gezeigt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \rho'' > 0 \quad \forall\, h \in K_{\rho''}(0) \;: \quad \Big|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z)\Big| \;<\; \varepsilon \qquad \Box$$

Bemerkungen (4.11)

- Die Beispiele (4.9) a)–c) hätte man natürlich ebenso mit dem obigen Satzes herleiten können.

- Durch Potenzreihen definierte Funktionen

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k, \qquad |z-z_0| < r,$$

sind auf dem Konvergenzkreis $K_r(z_0)$ beliebig oft komplex differenzierbar und die Differentiationen dürfen unter der Summe vorgenommen werden.

- In diesem Fall gilt

$$a_k \;=\; \frac{1}{k!}\,f^{(k)}(z_0), \quad k \,\in\, \mathbb{N}_0,$$

d.h. die Potenzreihe stimmt mit der komplexen Taylor–Reihe der Funktion f überein.