2. Komplexe Funktionen

Unter einer *komplexen Funktion* $w = f(z)$ verstehen wir eine Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$. D ist der *Definitionsbereich* von f, $W := f(D)$ der *Bildbereich* oder *Wertebereich* von f. Wir nehmen an, dass D ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist.

Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} z &= x + i\,y, \\ w &= f(z) = u + i\,v, \\ u &= u(x,y), \; v = v(x,y) \end{aligned}$$

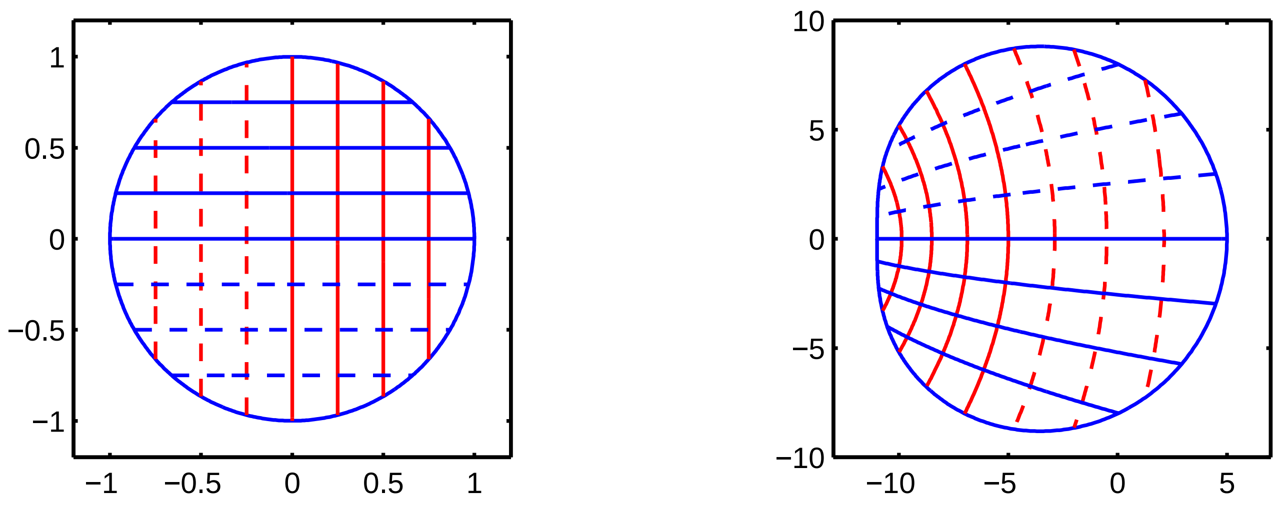


Abb 2.1. Bilder von Koordinatennetzen

Affin-lineare Funktionen. (2.1)

Wir betrachten eine affin–lineare Funktion $w = f(z) = a\,z + b$ mit $a,\, b \in \mathbb{C}$.

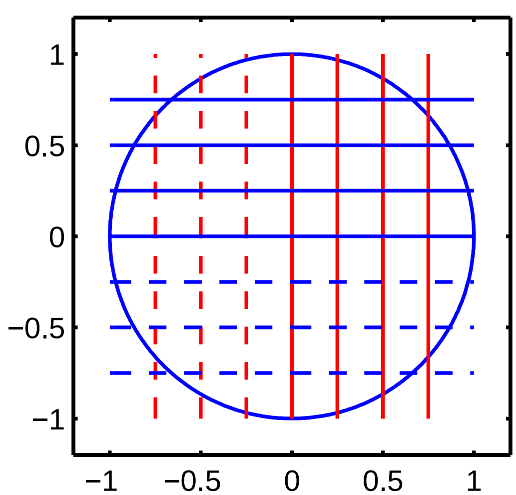
Aufspaltung ergibt $f(z) = \Big[|a|(\mathrm{e}^{i\,\phi_a}\,z)\Big] + b$

$f_1(z) = \mathrm{e}^{i\,\phi_a}\,z$ Drehung um den Winkel ϕ_a,

$f_2(z) = |a|\,z$ Steckung um den Faktor $|a|$,

$f_3(z) = z + b$ Verschiebung um den Vektor b.

Jede affin-lineare komplexe Funktion lässt sich geometrisch als Drehstreckung mit anschliessender Verschiebung interpretieren.



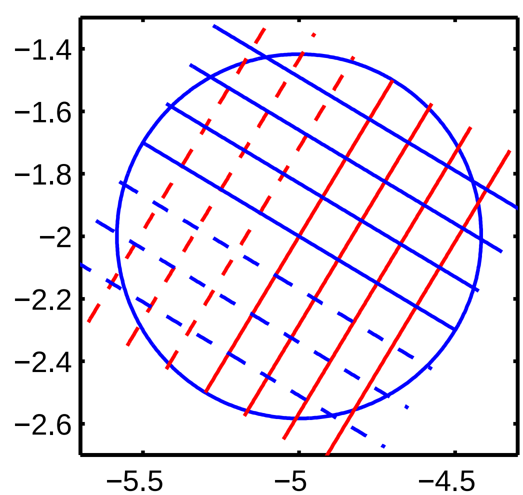


Abb 2.2. Affin-lineare komplexe Funktion

Quadratische komplexe Funktionen. (2.2)

Wir betrachten $\quad w = f(z) = a\,z^2 + b\,z + c$

Aufspaltung: $\quad f(z) = a\left(z + \dfrac{b}{2\,a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4\,a} + c$

Es genügt daher, sich das Quadrat $f(z) = z^2$ zu veranschaulichen.

$$w = z^2 = (x + i\,y)^2 = (x^2 - y^2) + i\,(2\,x\,y)$$

$$\Rightarrow \; u = x^2 - y^2, \quad v = 2\,x\,y.$$

(i) $\quad y = y_0 = 0 \;\Rightarrow\; u = x^2,\; v = 0 \qquad$ (Halbgerade)

$\quad y = y_0 \neq 0 \;\Rightarrow\; v^2 = 4y_0^2\,(y_0^2 + u) \qquad$ (Parabelschar)

(ii) $\quad x = x_0 = 0 \;\Rightarrow\; u = -\,y^2,\; v = 0 \qquad$ (Halbgerade)

$\quad x = x_0 \neq 0 \;\Rightarrow\; v^2 = 4x_0^2\,(x_0^2 - u) \qquad$ (Parabelschar)

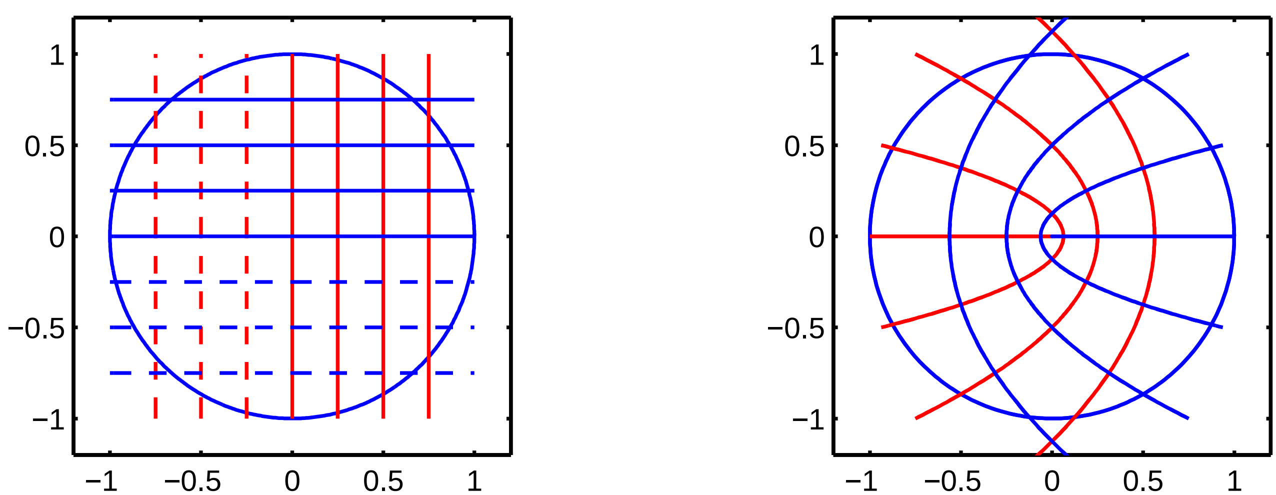


Abb 2.3. Quadratische komplexe Funktion $\;w = z^2$

Die Exponentialfunktion. (2.3)

$$\begin{aligned} w &= e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \\ \Rightarrow \quad u &= e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y\,. \end{aligned}$$

(i) $y = y_0 = \text{const.} \;\Rightarrow\; u = e^x \cos y_0,\; v = e^x \sin y_0,$
(Halbgeraden ohne Ursprung)

(ii) $x = x_0 = \text{const.} \;\Rightarrow\; u = e^{x_0} \cos y,\; v = e^{x_0} \sin y,$
(Kreise um 0, unendlich oft durchlaufen)

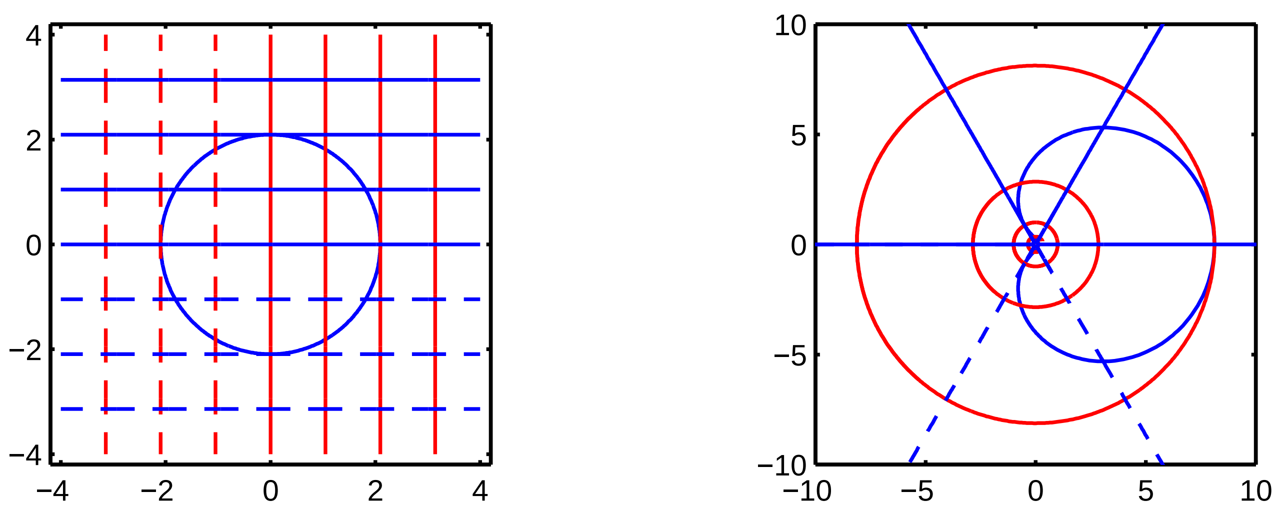


Abb 2.4. Exponentialfunktion $w = \exp(z)$

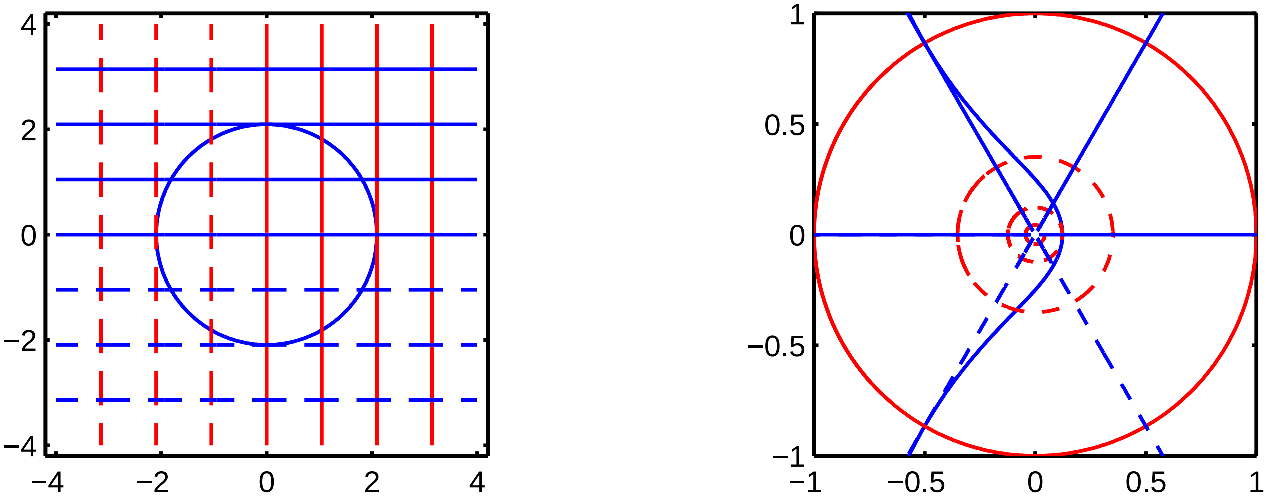


Abb 2.5. Exponentialfunktion $w = \exp(z)$

Die Quadratwurzel. (2.4)

Zur Umkehrung einer komplexen Funktion $w = f(z)$ wird die Injektivität von f benötigt. Diese ist jedoch i. Allg. a priori nicht gegeben und muss erst durch Verkleinerung des Definitionsbereichs von f erreicht werden.

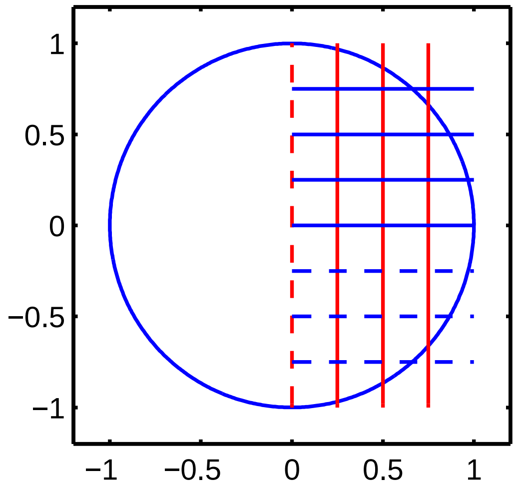
Die Quadratfunktion $w = f(z) := z^2$ ist auf dem eingeschränkten Definitionsbereich

$$D_f \;:=\; \{z \in \mathbb{C} : \; \mathrm{Re}\,(z) \;>\; 0\}$$

injektiv und bildet bijektiv auf den folgenden Wertebereich ab

$$W_f \;:=\; \mathbb{C} \setminus \{u \in \mathbb{R} : \; u \leq 0\},$$

vgl. die Abb 2.3.



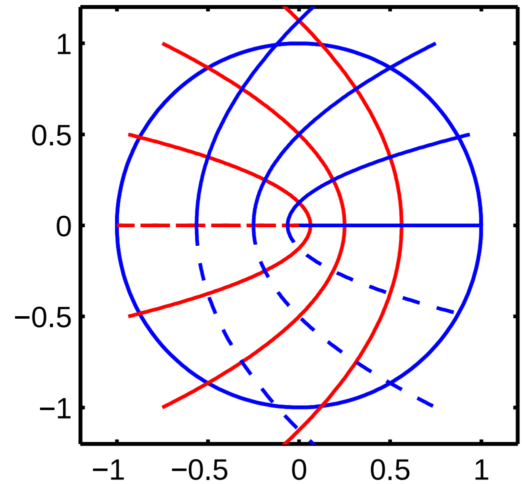


Abb 2.6. Quadratische komplexe Funktion $w = z^2$

Die Umkehrfunktion von $w = z^2$ lässt sich also folgendermaßen definieren

Definition. (2.5)

$$z = r\,\mathrm{e}^{i\,\phi},\ -\pi < \phi < \pi,\ r > 0 \quad \Rightarrow \quad w := \sqrt{z} := \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\,\phi/2}$$

$w = \sqrt{z}$ heißt der *Hauptwert der Wurzel*. Hierdurch ist eine komplexe Funktion definiert

$$\sqrt{z}:\ \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}:\ x \leq 0\} \ \to\ \{w:\ \mathrm{Re}\,(w) > 0\}.$$

Beachten Sie den Unterschied zur mengenwertigen Definition der Umkehrrelation

$$z^{1/2} := \{w \in \mathbb{C}:\ w^2 = z\}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Der Logarithmus. (2.6)

Zur Invertierung der Exponentialfunktion setzen wir

$$\mathrm{e}^{w} = z = |z|\,\mathrm{e}^{i\,\phi} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{u} = |z| \;\wedge\; v = \phi + 2\pi k, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

Die Menge der Lösungen von $\mathrm{e}^{w} = z$ ist demnach gegeben durch

$$\mathrm{Log}(z) \;:=\; \{\ln|z| + i\,(\arg z + 2\,\pi\,k) : \; k \in \mathbb{Z}\}.$$

$\mathrm{Log}(z)$ heißt der komplexe Logarithmus und ist für alle $z \neq 0$ definiert. Beachten Sie, dass $\mathrm{Log}(z)$ eine Menge bezeichnet.
Zur Gewinnung der Umkehrfunktion schränken wir den Definitionsbereich von e^{z} ein auf den Streifen

$$S \;:=\; \{z \in \mathbb{C} : \; -\pi < \mathrm{Im}\, z < \pi\}.$$

Die Exponentialfunktion ist auf diesem Streifen injektiv mit dem Wertebereich $W = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : \; x \leq 0\}$.

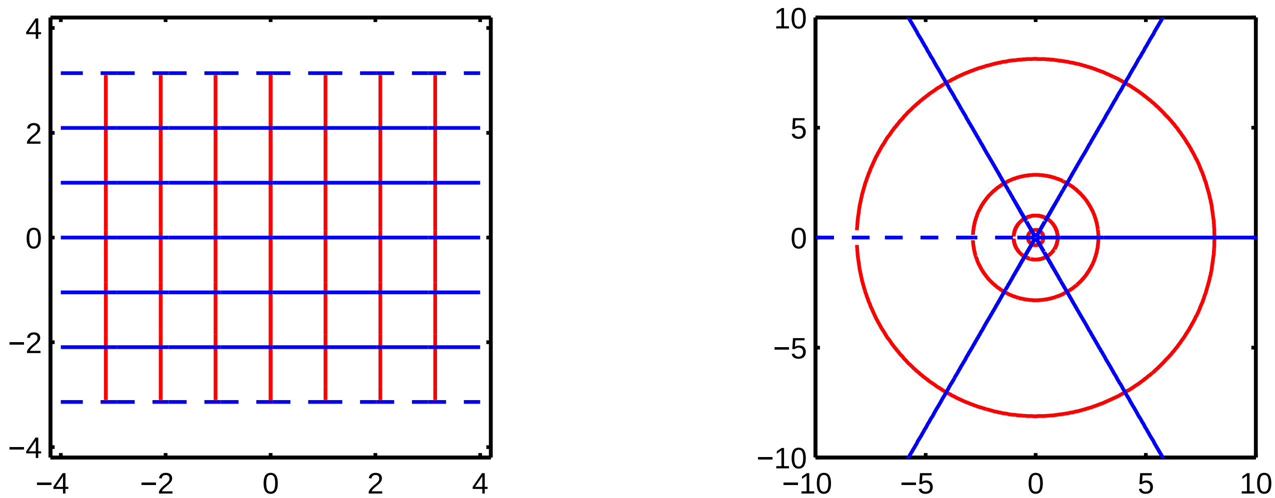


Abb 2.7. Exponentialfunktion $w = e^{z}$

Die Umkehrabbildung von exp auf diesem Streifen S lautet

$$\ln : \ \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 0\} \quad \to \quad \{z \in \mathbb{C} : \ -\pi \ < \ \operatorname{Im} z \ < \ \pi\}$$

$$\ln(z) \ := \ \ln|z| \ + \ i \arg(z), \ -\pi \ < \ \arg(z) \ < \ \pi. \tag{2.7}$$

$\ln(z)$ heißt Hauptwert des komplexen Logarithmus.

Die Joukowski-Funktion. (2.8)

$$w \ = \ f(z) \ = \ \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Wegen $f(1/z) \ = \ f(z)$ genügt es, den Bereich $|z| \ \geq 1$ zu betrachten. Wir untersuchen dazu die Bilder eines Polarkoordinatennetzes $|z| = r_0 = \text{const.}$ und $z = r\,\mathrm{e}^{i\phi_0}$, $r > 0$.

(i) $$z \ = \ r_0\,\mathrm{e}^{i\,\phi}, \quad r_0 \geq 1, \quad 0 \leq \phi \leq 2\,\pi$$

$$\Rightarrow \ w \ = \ \frac{1}{2}\left(r_0\,\mathrm{e}^{i\,\phi} + \frac{1}{r_0}\,\mathrm{e}^{-i\,\phi}\right)$$

$$\Rightarrow \ u \ = \ \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)\cos\phi, \quad v \ = \ \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)\sin\phi$$

Für $r_0 = 1$ ergibt sich die doppelt durchlaufenen Strecke $[-1, 1]$. Für $r_0 > 1$ erhält man die Parameterdarstellung einer Ellipse mit Halbachsen $a = (r_0 + 1/r_0)/2$ und $b = (r_0 - 1/r_0)/2$.

(ii) $$z \ = \ r\,\mathrm{e}^{i\,\phi_0}, \quad r > 0, \quad \phi_0 \in [0, 2\,\pi[$$

$$\Rightarrow \ u \ = \ \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\phi_0, \quad v \ = \ \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\phi_0$$

$$\begin{array}{lll}
\phi_0 & = 0: & \text{Halbgerade } [1,\infty[\text{ doppelt durchlaufen} \\
\phi_0 & = \pi/2: & \text{einmal durchlaufene } v-\text{Achse} \\
\phi_0 & = \pi: & \text{Halbgerade }]-\infty,-1] \text{ doppelt durchlaufen} \\
\phi_0 & = 3\pi/2: & \text{einmal durchlaufene } v-\text{Achse}
\end{array}$$

Für $\phi \neq 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ ergibt sich durch Elimination von r die Darstellung

$$\frac{u^2}{\cos^2\phi_0} - \frac{v^2}{\sin^2\phi_0} = 1\,.$$

Dies ist die Parameterdarstellung einer Hyperbel mit Halbachsen $a = |\cos\phi_0|$ und $b = |\sin\phi_0|$ und Brennpunkten $c = \pm 1$.

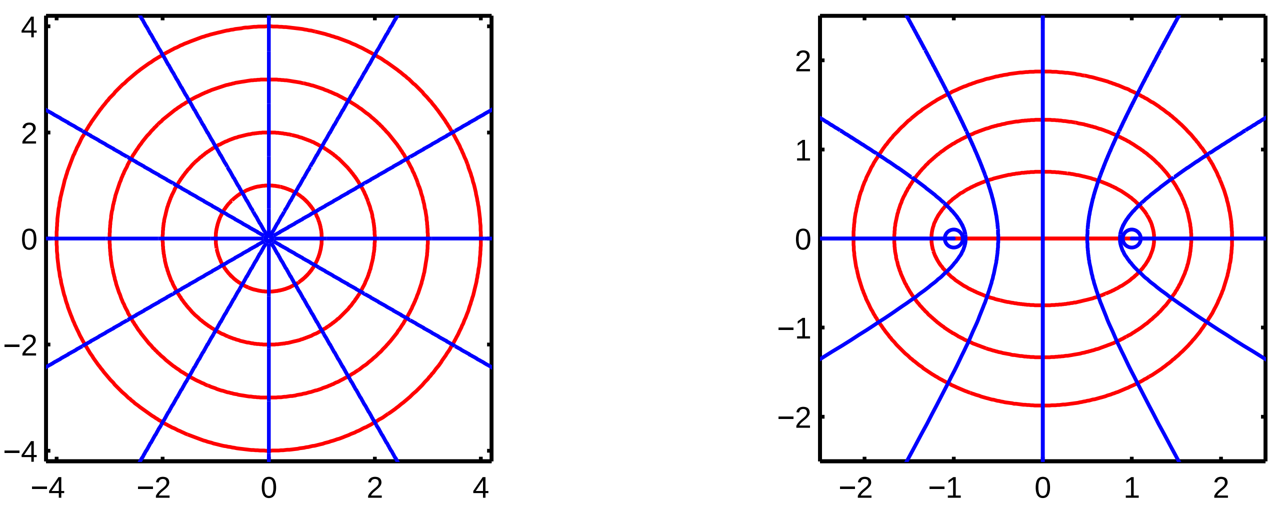


Abb 2.8. Joukowski-Funktion $w = 0.5\,(z + 1/z)$

Umkehrung der Joukowski-Funktion. (2.8)

Die Joukowski-Funktion $w = f(z) = 1/2\,(z + 1/z)$ ist auf dem Bereich

$$D \ := \ \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 1\}$$

injektiv und hat dort den Wertebereich

$$W \ := \ \{w \in \mathbb{C} : \ w \notin [-1, 1]\}$$

Für die Umkehrfunktion ergibt sich

$$w \ = \ f^{-1}(z) \ = \ z + \sqrt{z^2 - 1}.$$