Hans Joachim Oberle
Universität Hamburg

Komplexe Funktionen

Vorlesung an der TUHH im Sommersemester 2005

Freitags, 9:00 - 10:30, Audimax I

Literatur.

P. Henrici, R. Jelsch: Komplexe Analysis für Ingenieure.
(2 Bände), Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.
ISBN: 376431902X (Band 1) und 3764319038 (Band 2).

R. Remmert: Funktionentheorie I.
Springer Verlag, Heidelberg, 2001 (5. Auflage).
ISBN: 3540418555.

L. Ahlfors: Complex Analysis.
McGraw-Hill, New York, 1979.
ISBN: 00700006571.

J.B. Conway: Functions of One Complex Variable.
Springer Verlag, Heidelberg, 1997.
ISBN: 0387903283.

1. Einleitung und Wiederholung

Das mathematische Gebiet, das in dieser Vorlesung behandelt wird, heißt auch *Komplexe Analysis* oder *Funktionentheorie*, genauer: *Theorie der analytischen Funktionen*.
Es behandelt die Analysis (Differentiation und Intergration) komplexer Funktionen $f : \mathbb{C} \supset G \to \mathbb{C}$, wobei G ein Gebiet in der komplexen Ebene ist.

Nochmals zur Erinnerung: Ein *Gebiet* ist eine offene und zusammenhängende Menge. Eine Menge $G \subset \mathbb{C}$ heißt *offen*, wenn mit jedem Punkt $z_0 \in G$ auch eine Kreisscheibe $K_\varepsilon(z_0) := \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$ zur Menge G gehört.
Sie heißt *zusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $z_0, z_1 \in G$ stets eine diese Punkte verbindende C^1–Kurve $c : [0, 1] \to G$ in G gibt.

Historische Anmerkungen.

Die Funktionentheorie wurde in der ersten Hälfte des 19. Jahrhundert entwickelt. Sie hat drei Väter, die ganz unterschiedliche Zugänge zu der Theorie analytischer Funktionen verwendet haben.

Augustin Cauchy (1798-1857; Paris): Komplexe Differenzierbarkeit, Integraldarstellung analytischer Funktionen

Bernhard Riemann (1826-1866; Göttingen): Geometrische Eigenschaften so genannter konformer Abbildungen

Karl Weierstraß (1815-1897; Münster, Braunschweig, Berlin): Potenzreihendarstellung komplexer Funktionen (Eine elegante Darstellung des letzteren Zugangs findet man in dem Buch von *Henry Cartan*: Elementare Theorie analytischer Funktionen, 1961).

A. Cauchy

B. Riemann

K. Weierstraß

Wiederholung.

$(\mathbb{R}, +, *, \leq)$ ist ein vollständiger, angeordneter Körper

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ ist reeller Vektorraum mit Operationen

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \lambda\,(x, y) &:= (\lambda\, x, \lambda\, y), \qquad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Es lässt sich auf $\mathbb{R}^2$ auch eine *Multiplikation* definieren:

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1\, x_2 - y_1\, y_2,\; x_1\, y_2 + x_2\, y_1), \tag{1.2}$$

so dass $\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, *)$ ein *kommutativer Körper* wird mit *Nullelement* $0 := (0, 0)$ und *Einselement* $1 := (1, 0)$.

Inverse Elemente:

$$-z \;:=\; (-x, -y),$$

$$1/z \;:=\; \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right) \qquad (1.3)$$

Die reellen Zahlen lassen sich als Teilmenge von $\mathbb{C}$ interpretieren vermöge $x := (x, 0)$. $\mathbb{C}$ ist eine *Körpererweiterung* von $\mathbb{R}$.

Setzt man $i := (0, 1)$, so lässt sich jede komplexe Zahl eindeutig schreiben in der Form

$$z \;=\; (x, y) \;=\; (x, 0) \,+\, (0, 1) * (y, 0) \;=\; x \,+\, i\, y$$

Die komplexe Zahl i heißt imaginäre Einheit. Es gilt $i^2 \;=\; -1$.

Real- und Imaginärteil: $\mathrm{Re}\,(z) \;:=\; x, \quad \mathrm{Im}\,(z) \;:=\; y$

Konjugiert komplexe Zahl: $\overline{z} \;:=\; x \,-\, i\, y \;=\; \mathrm{Re}\,(z) \,-\, i\,\mathrm{Im}\,(z)$

Betrag, Modul: $|\,z\,| \;:=\; \sqrt{x^2 \,+\, y^2}$

Polarkoordinaten: Zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ existieren eindeutig bestimmte Zahlen $r > 0$ und $\phi \in \,]-\pi, \pi]$ mit

$$z \;=\; r\,(\cos\phi + i\,\sin\phi) \;=:\; r\,\mathrm{e}^{i\,\phi} \qquad (1.4)$$

Es ist $r = |z|$ der Modul und $\phi =: \arg(z)$ das Argument der komplexen Zahl z. Es gelten

$$z_1 * z_2 \;=\; r_1\, r_2\, \mathrm{e}^{i\,(\phi_1+\phi_2)}, \qquad z^n \;=\; r^n\, \mathrm{e}^{i\,n\,\phi}$$

$$\arg(z_1 * z_2) \;=\; \arg(z_1) \,+\, \arg(z_2) \quad \mathrm{mod}\ (2\,\pi)$$

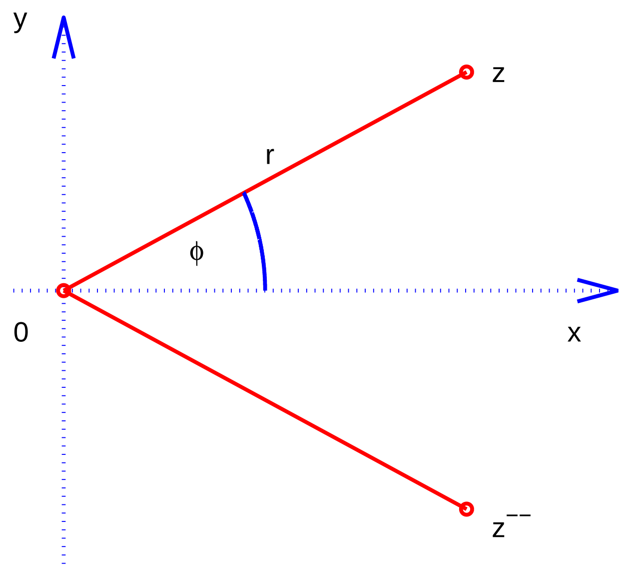

Abb 1.1. Polarkoordinaten und konjugiert komplexe Zahl

Lineare Abbildungen.

Eine Abbildung $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt $\mathbb{R}$–linear, wenn gelten

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad L(z_1 + z_2) \;=\; L(z_1) + L(z_2), \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ &\text{(ii)} \quad L(\lambda\, z) \;=\; \lambda\, L(z), \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\; z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Nach Linearer Algebra besitzt jede $\mathbb{R}$–lineare Abbildung L eine Matrxdarstellung

$$L(z) \;=\; A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Beispiele:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{(Streckungen)},$$

$$A \;=\; \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad \text{(Drehungen)}.$$

Definition (1.6) Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt $\mathbb{C}$–linear, wenn (1.5) (ii) sogar für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt.

Hierzu genügt es nachzuweisen, dass $L(i) = iL(1)$ gilt (Übungsaufgabe!). Nun sieht man mit der Matrixdarstellung

$$L(i) = i\,L(1) \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$$

Damit ist L genau dann eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, wenn sie durch eine Matrix folgender Gestalt beschrieben wird

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Drehungen und Streckungen sind vom Typ (1.7), sie stellen also $\mathbb{C}$–lineare Abbildungen dar, während Spiegelungen an Ursprungsgeraden (wegen ihrer negativer Determinante) keine $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen sind.

In diesem Zusammenhang ist es naheliegend zu fragen, wann eine C^1–Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in erster Näherung durch eine $\mathbb{C}$-lineare Funktion approximiert wird. Dies bedeutet gerade, dass die Jacobi-Matrix $Jf(x,y)$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung beschreibt, dass also nach (1.7) mit $f = u + i\,v$ gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.8}$$

Dies sind die so genannten Cauchy – Riemannschen Differentialgleichungen.

Konvergenz.

Per Definition gilt für eine komplexe Folge $(z_n) = (x_n + i\, y_n)$:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \;:\Longleftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} |\, z_n - z\,| = 0$$
$$\Longleftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Satz von Bolzano, Weierstraß: Jede beschränkte Folge (z_n) besitzt eine konvergente Teilfolge.

Folgerung (1.9) Der Körper der komplexen Zahlen ist vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ ist konvergent.

Der Beweis erfolgt wie im reellen Fall, vgl. (8.2.19). $\square$

Konvergenzkriterien für Reihen.

Majorantenkriterium, Quotientenkriterium und Wurzelkriterium gelten analog auch für komplexe Reihen

$$|a_k| \leq b_k \;\wedge\; \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ kvgt.} \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ abs. kvgt.}$$
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ abs. kvgt.}$$
$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ abs. kvgt.}$$

Analog gelten auch Umordnungssatz (8.4.11) und Reihenproduktsatz (8.4.13) für komplexe Reihen.

Potenzreihen.

Jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ mit $a_k, z_0 \in \mathbb{C}$ besitzt einen Konvergenzradius $r \in [0, \infty]$, so dass $f(z)$ für $|z - z_0| < r$ absolut konvergiert und für $|z - z_0| > r$ divergiert.

Gleichmäßige Konvergenz liegt auf jeder (abgeschlossenen) Kreisscheibe $\overline{K}_\rho(z_0) := \{z : |z - z_0| \leq \rho\}$ mit $0 < \rho < r$ vor.

Prominente Beispiele (mit $r = \infty$) sind

- Exponentialfunktion: $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$
- Sin/Cos: $\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$,

  $\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$.

Die folgenden Umformungen sind aufgrund der lokal gleichmäßigen Konvergenz der verwendeten Potzenzreihen gerechtfertigt

$$
\begin{aligned}
\exp(iy) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (i\, y)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} i^k y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} i^{2k} y^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} i^{2k+1} y^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1} \\
&= \cos(y) + i \sin(y)
\end{aligned}
$$

$$
\exp(z) = \exp(x + i\, y) = \exp(x) \Big(\cos(y) + i \sin(y) \Big)
$$

$$\begin{aligned}
\sin(z) &= \sin(x + i\,y) = \sin(x)\,\cos(i\,y) + \cos(x)\,\sin(i\,y) \\
\cos(iy) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(i\,y)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\,y^{2k} = \cosh y \\
\sin(iy) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(iy)^{2k+1} = i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= i\,\sinh(y) \\
\sin(z) &= \sin(x)\,\cosh(y) + i\,\cos(x)\,\sinh(y)
\end{aligned}$$

Aufgaben.

- Leiten Sie eine analoge Formel für $\cos(z)$ her.
- Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\sin z = 2$.