Aufgabe 1)

a) Bestimmen Sie die Möbius-Transformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit:

$$T(0) = 0, \quad T(\infty) = 4, \quad T(2i) = 2.$$

b) Welches ist das Bild der imaginären Achse?

c) Welches ist das Bild der reellen Achse?

d) Welches ist das Bild des Kreises $|z| = 2$?

e) Wie sieht die Bildmenge zu

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2 \text{ und } \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

aus? Zeichnen Sie dazu eine Skizze!

Aufgabe 2)

a) Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(z) \;=\; \frac{\sin(z)}{z\,(z^2+1)}\,.$$

(i) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

(ii) Berechnen Sie die Residuen in allen isolierten Singularitäten von f.

(iii) Berechnen Sie folgende Integrale, wobei die angegebenen Kreise einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden sollen.

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz\,, \qquad\qquad \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} f(z)dz\,.$$

b) Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx\,.$$

Geben Sie das Ergebnis auch in kartesichen Koordinaten an.