Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2004**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5:

a) Mit Hilfe der stereographischen Projektion $P : S^2 \to \mathbb{C}^*$ erklären wir als sphärische Distanz zweier Punkte $z, w \in \mathbb{C}^*$ den euklidischen Abstand von $P^{-1}(z)$ und $P^{-1}(w)$ in $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Man zeige für $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} d(z,w) &= \frac{2|z-w|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}} \\ d(z,\infty) &= \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}} . \end{aligned}$$

b) Für die sphärische Distanz zweier Punkte $z, w \in \mathbb{C}^*$ beweise man

$$d\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right) = d(z,w) .$$

Aufgabe 6:

Gegeben sei die Abbildung $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit

$$T(z) = \frac{z-3i}{z+3i} .$$

a) Definiert T eine Möbius-Transformation?

b) Wie lautet die Umkehrabbildung?

c) Bestimmen Sie das Bild der imaginären Achse.

d) Bestimmen Sie das Bild des Kreises $|z| = 3$.

e) Bestimmen Sie das Bild der reellen Achse.

f) Welches ist das Bild von $M := \{z = x + iy : |z| < 3;\ Re(z) = x > 0\}$. Fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Möbiustransformation T, und die ihr zugeordnete 2×2 Matrix $\boldsymbol{A}$:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad ad - bc \neq 0\,.$$

a) Man zeige für $c \neq 0$ folgende Aussagen:

(i) T besitzt ein oder zwei Fixpunkte. Man verwende dabei die Fixpunktgleichung $T(z) = z$ und gebe eine Formel zur Berechnung der Fixpunkte $z_{1,2}^*$ an.

(ii) z^* ist genau dann Fixpunkt von T, wenn $(z^*, 1)^T$ Eigenvektor zu $\boldsymbol{A}$ ist.

(iii) Sind $\lambda_{1,2}$ die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$, so lassen sich die Fixpunkte berechnen durch:

$$z_{1,2}^* = \frac{\lambda_{1,2} - d}{c}\,.$$

Man überprüfe insbesondere, ob diese Formel in Verbindung mit der Berechnung der Eigenwerte über das charakteristische Polynom mit der Berechnungsvorschrift aus (i) übereinstimmt.

b) Man überprüfe die Aussagen am Beispiel $\quad T(z) = \dfrac{1}{3z+2}\,.$

Aufgabe 8:

Man überprüfe, welche der folgenden Funktionen holomorph in $\mathbb{C}$ sind:

a) $f(z) = ze^z\,,$

b) $f(z) = \sin(\operatorname{Re} z)\,,$

c) $f(z) = z^2 + 2\bar{z} + 1\,,$

d) $f(z) = |z|^2 + 2\,.$

Abgabetermin: 11.5.2004