Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2003**
Prof. Dr. J. Stuckmeier
Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale. Die angegebenen Kurven sollen einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden.

a) $\displaystyle\int\limits_{C_k} \frac{e^z}{z}\, dz \qquad k = 1, 2$

$C_1 \,:\, |z| = 1, \quad C_2 : |z-2| = 1\,,$

b) $\displaystyle\int\limits_{C_k} \frac{e^z}{(z-2i)^5}\, dz \qquad k = 1, 2$

$C_1 \,:\, |z-1| = 2, \quad C_2 : |z-i| = 2\,,$

c) $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{\cos^2(z)}{(z-\frac{\pi}{4})^4}\, dz \qquad C \,:\, |z-1| = 1\,,$

d) $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{z+2i}{(z^2-2z-3)}\, dz \qquad C \,:\, |z-i| = 2\,,$

e) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{\cos(z)}{z^{4k+1}}\, dz \qquad C \,:\, |z| = 1\,,$

Aufgabe 2:

Sei C eine einfach geschlossene (d.h. kein Punkt wird mehrmals durchlaufen) stückweise C^1 Kurve. Wann ist das Integral

$$I(C) := \int\limits_C \frac{z}{z^2+1}\,dz$$

definiert?

Wieviele verschiedene Werte kann das Integral annehmen, wenn es definiert ist?

Fertigen Sie für jeden möglichen Wert eine Skizze an.

Aufgabe 3:

Geben Sie, ohne die Reihen zu berechnen, für die folgenden Funktionen den Radius des größten Kreises um Null an, in dem die Taylorreihe der jeweiligen Funktion mit Entwicklungspunkt 0 definiert ist und konvergiert.

a)
$$f(z) = \frac{1}{e^{2z}+1}$$

b)
$$f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

c)
$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{Log}\left(\frac{i+1}{2} - z\right)}$$

d)
$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{Log}\left(\frac{i-1}{2} - z\right)}$$

Aufgabe 4:

Sei $f : D := \{z \in \mathbb{C} : z \notin \mathbb{R}^-\} \to \mathbb{C};\ z \to \operatorname{Log}(z)$ der Hauptwert des komplexen Logarithmus. Bestimmen Sie die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = i$.

Abgabetermin: 17.06.03