Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für} \quad 0 < x < 3\,, \\ & && \phantom{\text{für}} \quad 0 < t \leq T\,, \\ u(0,t) &= 0 = u(3,t) && \text{für} \quad 0 \leq t \leq T \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für} \quad 0 \leq x \leq 3\,. \end{aligned}$$

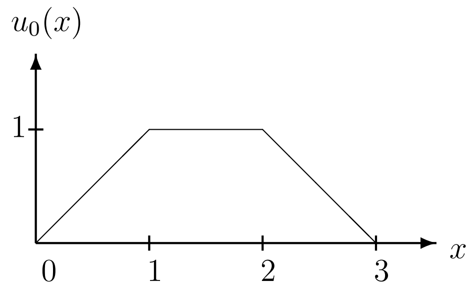

Bild 21 Anfangsfunktion u_0

Aufgabe 22:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0\,, \\ u(x,0) &= e^{3x-1} && \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) unter Verwendung der Fundamentallösung und

b) mit Hilfe eines Produktansatzes.

Aufgabe 23:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$
\begin{array}{rcll}
u_t &=& \Delta u & \text{für} \quad (x,y) \in\,]0,1[\, \times\,]0,2[\,, \quad 0 < t\,, \\
u(0,y,t) &= 0& = u(1,y,t) & \text{für} \quad y \in [0,2]\,, \quad 0 \le t\,, \\
u(x,0,t) &= 0& = u(x,2,t) & \quad x \in [0,1]\,, \quad 0 \le t\,, \\
u(x,y,0) &=& 7\sin(2\pi x)\sin(\pi y) & \text{für} \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,2] \\
&& +(3\sin(\pi x) - 4\sin^3(\pi x))\sin(3\pi y/2) & .
\end{array}
$$

Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

Aufgabe 24:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$
\begin{array}{rcll}
u_{tt} - u_{xx} &=& -4x\,, & x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\
u(x,0) &=& 1\,, & x \in \mathbb{R}\,, \\
u_t(x,0) &=& \cos x\,, & x \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

und bestätige die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

Hinweis: Man bestimme zunächst eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in Polynomform und verwende anschließend das Superpositionsprinzip.

Abgabetermin: 27.06.06 (zu Beginn der Übung)