Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 5

Aufgabe 17:

Man löse die Aufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u = -1, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b, \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a \end{aligned}$$

folgendermaßen:

a) Man bestimme eine partikuläre Lösung von $\Delta u = -1$ in der Gestalt

$$u_p(x,y) = \alpha x + \beta x^2, \quad \alpha \neq 0.$$

b) Man setze $u_h := u - u_p$ und gebe das resultierende Randwertproblem in u_h an.
Hinweis:
Durch geeignete Wahl von α lässt sich eine Randbedingung vereinfachen.

c) Man löse die Randwertaufgabe aus b).

Lösung:

a) $u_p(x,y) = \alpha\, x - \dfrac{x^2}{2}$ löst $\Delta u_p = -1$.

b)

$$\Delta u_h = \Delta u - \Delta u_p = -1 - (-1) = 0$$

$$\begin{aligned} u_h(0,y) &= u(0,y) - u_p(0,y) = 0 - 0 = 0 \\ u_h(a,y) &= u(a,y) - u_p(a,y) = 0 - \left(\alpha\, a - \frac{a^2}{2}\right) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = \frac{a}{2} \\ u_h(x,0) &= u(x,0) - u_p(x,0) = 0 - \left(\frac{ax}{2} - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(x^2 - ax) \\ u_h(x,b) &= u(x,b) - u_p(x,b) = \frac{1}{2}(x^2 - ax) \end{aligned}$$

c) Dieses Dirichlet-Problem hat die Eigenschaft, dass u in den Randeckpunkten den Funktionswert 0 annimmt.

Solche Probleme setzen sich aus der Summe von zwei Teillösungen zusammen, wobei jede dieser Teillösungen auf zwei gegenüberliegenden Rändern den Wert 0 annimmt und auf dem verbleibenden gegenüberliegenden Rändern die Randdaten des Ausgangsproblems erfüllt. Im vorliegenden Fall ist nur eine dieser Teillösungen zu bestimmen, da schon auf zwei gegenüberliegenden Rändern der Wert 0 angenommen wird.

Die Lösung erfolgt über einen Produktansatz

$$u_h(x,y) = X(x)Y(y)\,.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung $\Delta u_h = 0$ ergibt sich

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} =: \lambda\,.$$

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{und} \quad Y'' - \lambda Y = 0\,.$$

Die Randbedingungen

$$0 = u_h(0,y) = X(0)Y(y) \quad \text{und} \quad 0 = u_h(a,y) = X(a)Y(y)$$

ergeben $X(0) = 0$ und $X(a) = 0$, da andernfalls $Y \equiv 0$ und damit $u_h \equiv 0$ gelten würde.

Gelöst wird zunächst das Randeigenwertproblem in X:

Auf Grund der Nullrandbedingungen führen nur die Lösungen mit $\lambda > 0$

$$X(x) = \alpha\sin(\sqrt{\lambda}x) + \beta\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

auf ein nichttriviales u_h. Aus $X(0) = 0$ folgt $\beta = 0$. $X(a) = 0$ liefert für $k > 0$ die Eigenwerte $\lambda_k = \dfrac{k^2\pi^2}{a^2}$ mit den zugehörigen Eigenfunktionen

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right).$$

Setzt man $\lambda_k = \dfrac{k^2\pi^2}{a^2}$ in die Differentialgleichung für Y ein, so erhält man dort die allgemeine Lösung

$$Y_k(y) = A_k\exp\left(\frac{k\pi y}{a}\right) + B_k\exp\left(-\frac{k\pi y}{a}\right)\,.$$

Man erhält so aus dem Produktansatz durch Superposition ($\Delta u = 0$ ist linear) die Lösungsdarstellung

$$u_h(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\left(A_k \exp\left(\frac{k\pi y}{a}\right) + B_k \exp\left(-\frac{k\pi y}{a}\right)\right) .$$

Mit den noch nicht verwendeten Randbedingungen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x^2 - ax) = u_h(x,0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)(A_k + B_k)\,, \\
\frac{1}{2}(x^2 - ax) = u_h(x,b) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\left(A_k \exp\left(\frac{k\pi b}{a}\right) + B_k \exp\left(-\frac{k\pi b}{a}\right)\right)
\end{aligned}$$

werden die noch unbekannten Koeffizienten A_k und B_k berechnet. Dazu werden die Koeffizienten b_k der Fourierreihe der Randfunktion berechnet:

$$b_k = \frac{2}{a}\int_0^a \frac{1}{2}(x^2 - ax)\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k = 2,4,6,\ldots \\ -\dfrac{4a^2}{k^3\pi^3} & \text{für} \quad k = 1,3,5,\ldots \end{cases} .$$

A_k und B_k ergeben sich dann aus der Lösung des linearen 2×2 Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \exp\left(\dfrac{k\pi b}{a}\right) & \exp\left(-\dfrac{k\pi b}{a}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_k \\ b_k \end{pmatrix}$$

$$A_k = \frac{\left(\exp\left(-\dfrac{k\pi b}{a}\right) - 1\right) b_k}{\exp\left(-\dfrac{k\pi b}{a}\right) - \exp\left(\dfrac{k\pi b}{a}\right)}\,, \quad B_k = \frac{\left(1 - \exp\left(\dfrac{k\pi b}{a}\right)\right) b_k}{\exp\left(-\dfrac{k\pi b}{a}\right) - \exp\left(\dfrac{k\pi b}{a}\right)} .$$

Die Lösung des Ausgangsproblems mit diesen Koeffizienten für u_h lautet dann

$$u(x,y) = \frac{x}{2}(a - x) + u_h(x,y)\,.$$

Aufgabe 18:

a) Man zeige:

Die Laplacegleichung in kartesischen Koordinaten $u_{xx} + u_{yy} = 0$ besitzt in Polarkoordinaten $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ folgende Dartstellung:

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2} = 0 \,.$$

b) Mit Hilfe eines Produktansatzes der Form $u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$ berechne man alle Lösungen von

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \,.$$

Hinweis:

Für sogenannte Eulersche Differentialgleichungen

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

liefert ein Ansatz der Form $y(x) = x^\alpha$ Lösungen.

Lösung:

a) Die Transformation in Polarkoordinaten $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ mit $\tilde{u}(r, \varphi) := u(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) \Leftrightarrow \tilde{u}(r(x, y), \varphi(x, y)) = u(x, y)$ erfolgt nach der Kettenregel:

Für die Jacobimatrix der Koordinatentransformation erhält man:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\dfrac{\sin\varphi}{r} & \dfrac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ -\dfrac{y}{r^2} & \dfrac{x}{r^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für die zweiten Ableitungen ergibt sich daraus

$$r_{xx} = \frac{y^2}{r^3} \,, \quad r_{yy} = \frac{x^2}{r^3} \,, \quad \varphi_{xx} = \frac{2xy}{r^4} \,, \quad \varphi_{yy} = -\frac{2xy}{r^4} \,.$$

$$\begin{aligned}
u_x &= \tilde{u}_r r_x + \tilde{u}_\varphi \varphi_x \,, \quad u_y = \tilde{u}_r r_y + \tilde{u}_\varphi \varphi_y \\
u_{xx} &= \tilde{u}_{rr}(r_x)^2 + 2 r_x \varphi_x \tilde{u}_{r\varphi} + \tilde{u}_{\varphi\varphi}(\varphi_x)^2 + \tilde{u}_r r_{xx} + \tilde{u}_\varphi \varphi_{xx} \,, \\
u_{yy} &= \tilde{u}_{rr}(r_y)^2 + 2 r_y \varphi_y \tilde{u}_{r\varphi} + \tilde{u}_{\varphi\varphi}(\varphi_y)^2 + \tilde{u}_r r_{yy} + \tilde{u}_\varphi \varphi_{yy} \,.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2} \,.$$

b) Setzt man den Produktansatzes $u(r,\varphi) = R(r)\cdot\Phi(\varphi)$ in die Differentialgleichungen ein, so ergibt sich

$$r^2R''\Phi + rR'\Phi + R\Phi'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} =: \lambda$$

Die Differentialgleichung in $\Phi(\varphi)$ besitzt folgende Lösungen

$$\Phi(\varphi) \quad = \quad \begin{cases} a\varphi + b & , \quad \lambda = 0 \\ ae^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + be^{-\sqrt{-\lambda}\varphi} & , \quad \lambda \neq 0\,. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung in $R(r)$ besitzt folgende Lösungen:

1.Fall: $\lambda = 0$:

$$0 = r^2R'' + rR' \quad \Rightarrow \quad R'(r) = \frac{c}{r} \quad \Rightarrow \quad R(r) = c\ln r + d$$

2.Fall: $\lambda \neq 0$:

Der Ansatz $R(r) = r^\alpha$ eingesetzt in $r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$ liefert

$$r^\alpha(\alpha(\alpha-1) + \alpha - \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \lambda \quad \Rightarrow \quad R(r) = cr^{\sqrt{\lambda}} + dr^{-\sqrt{\lambda}}\,.$$

Die sich aus dem Produktansatz ergebenden Lösungen lauten also:

$$u(r,\varphi) \quad = \quad \begin{cases} (c\ln r + d)\,(a\varphi + b) & , \quad \lambda = 0 \\ \left(cr^{\sqrt{\lambda}} + dr^{-\sqrt{\lambda}}\right)\left(ae^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + be^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}\right) & , \quad \lambda \neq 0\,. \end{cases}$$

Aufgabe 19:

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Viertelkreis

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \quad \text{für} \quad 0 < r < 5 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} ,$$

$$u(r,0) = 0 \quad \text{und} \quad u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \le r \le 5 ,$$

$$u(5,\varphi) = \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \quad \text{für} \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

und bestimme den maximalen und minimalen Funktionswert von u.

Lösung:

Der Produktansatz $u(r,\varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$ eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$r^2 R''\Phi + rR'\Phi + R\Phi'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} =: \lambda$$

Der Produktansatz $u(r,\varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$ eingesetzt in die Randbedingungen

$$0 = u(r,0) = R(r)\Phi(0) , \quad 0 = u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = R(r)\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

ergibt nur nichttriviale Lösungen u (R darf nicht die Nullfunktion sein) für

$$\Phi(0) = 0 = \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) .$$

Damit erhält man für Φ nur für $\lambda > 0$ nichttriviale Lösungen (in reeller Darstellung):

$$\Phi(\varphi) = a\sin(\sqrt{\lambda}\varphi) + b\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) .$$

Insbesondere ergibt sich aus den Randbedingungen

$$0 = \Phi(0) = a\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 0) + b\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 0) = b \quad , \quad 0 = \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot\frac{\pi}{2}\right) .$$

Wegen $a \ne 0$, sonst wäre Φ die Nullfunktion, muss gelten

$$\sqrt{\lambda}\cdot\frac{\pi}{2} = k\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda} = 2k \Rightarrow \lambda_k = 4k^2 \quad \Rightarrow \quad \Phi_k(\varphi) = a_k \sin(2k\varphi) , \quad k = 1,2,\ldots$$

Setzt man $\lambda_k = 4k^2$ in die Differentialgleichung für $R(r)$ ein, so erhält man dort die Lösungen

$$R_k(r) = c_k r^{2k} + d_k r^{-2k} .$$

Hier muss noch $d_k = 0$ gesetzt werden, da die Lösung sonst im Nullpunkt, der hier zum Definitionsbereich gehört, eine Singularität besäße.

Durch Superposition ergibt sich aus dem Produktansatz damit die Lösungsdarstellung

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{2k} \sin(2k\varphi) .$$

Mit der noch nicht verwendeten Randbedingung

$$u(5,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k 5^{2k} \sin(2k\varphi) = \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

berechnet man A_k aus den Fourier-Koeffizienten

$$c_k \;=\; \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \sin(2k\varphi)\, d\varphi \;=\; \frac{1}{\pi k^3}(1 - \cos(k\pi)) = \begin{cases} \dfrac{2}{k^3\pi} & k \quad \text{ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

durch $A_k 5^{2k} = c_k \;\Rightarrow\; A_k = c_k 5^{-2k}$. Die Lösung des Ausgangsproblems lautet mit den obigen Fourkoeffizienten also:

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{r}{5}\right)^{2k} \sin(2k\varphi)\,.$$

Da u harmonisch und nicht konstant ist, werden Maximum und Minimum nur auf dem Rand angenommen, können also aus den Randbedingungen abgelesen werden.

Der Minimalwert ist damit gleich 0.

Der Maximalwert wird im Punkt $(r,\varphi) = \left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ angenommen:

$$u_{\max} = u\left(5, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16}\,.$$

Aufgabe 20:

Gegeben sei das folgende Dirichlet-Problem im Kreisring
$2 < r = \sqrt{x^2+y^2} < 3$ (in Polarkoordinaten):

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \,,$$

$$u(2,\varphi) = \cos\varphi \,,$$

$$u(3,\varphi) = 1 + \frac{65}{144}\sin(2\varphi) \,.$$

Man berechne die Lösung in

a) Polarkoordinaten und

b) kartesischen Koordinaten.

Lösung:

a) Der Produktansatz $u(r,\varphi) = R(r)\cdot\Phi(\varphi)$ eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$r^2 R''\Phi + rR'\Phi + R\Phi'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} =: \lambda$$

Da $\Phi(\varphi)$ im Kreisring 2π-periodisch sein muss $(\Phi(0) = \Phi(2\pi))$, erhält man nichttriviale Lösungen $\Phi(\varphi)$ nur für $\lambda \geq 0$, nämlich für $\lambda = 0$ und $\lambda_k = k^2$:

$$\Phi_0(\varphi) = a_0 \,, \quad \Phi_k(\varphi) = a_k\sin(k\varphi) + b_k\cos(k\varphi) \,, \quad k = 1,2,\ldots$$

Setzt man $\lambda = 0$ und $\lambda_k = k^2$ in die Differentialgleichung für $R(r)$ ein, so erhält man dort die Lösungen

$$R_0(r) = c_0 + d_0\ln r \,, \quad R_k(r) = c_k r^k + d_k r^{-k} \,.$$

Durch Superposition ergibt sich aus dem Produktansatz damit die Lösungsdarstellung im Kreisring

$$u(r,\varphi) = A_0 + B_0\ln r + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k r^k + C_k r^{-k})\cos(k\varphi) + (B_k r^k + D_k r^{-k})\sin(k\varphi) \,.$$

Die Randbedingung

$$\begin{aligned} u(2,\varphi) &= \cos(\varphi) \\ &= A_0 + B_0\ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k 2^k + C_k 2^{-k})\cos(k\varphi) + (B_k 2^k + D_k 2^{-k})\sin(k\varphi) \end{aligned}$$

ergibt $A_0 + B_0\ln 2 = 0 \,, \quad 2A_1 + C_1/2 = 1,$
sonst $A_k 2^k + C_k 2^{-k} = 0 = B_k 2^k + D_k 2^{-k} \,.$

Die Randbedingung

$$\begin{aligned} u(3,\varphi) &= 1 + \frac{65}{144}\sin(2\varphi) \\ &= A_0 + B_0 \ln 3 + \sum_{k=1}^{\infty} (3^k A_k + 3^{-k} C_k)\cos(k\varphi) + (3^k B_k + 3^{-k} D_k)\sin(k\varphi) \end{aligned}$$

ergibt $A_0 + B_0 \ln 3 = 1\,,\quad 9B_2 + \dfrac{D_2}{9} = \dfrac{65}{144},$

sonst $3^k A_k + 3^{-k} C_k = 0 = 3^k B_k + 3^{-k} D_k\,.$

Damit erhält man die von 0 verschiedenen Koeffizienten aus den Gleichungssystemen

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln 2 \\ 1 & \ln 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{-\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}\,,\ B_0 = \frac{1}{\ln 3 - \ln 2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_1 = -\frac{2}{5}\,,\ C_1 = \frac{18}{5}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1/4 \\ 9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 65/144 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{1}{16}\,,\ D_2 = -1$$

Damit lautet die Lösung

$$u(r,\varphi) = \frac{\ln r - \ln 2}{\ln 3 - \ln 2} + \left(\frac{18}{5r} - \frac{2r}{5}\right)\cos\varphi + \left(\frac{r^2}{16} - \frac{1}{r^2}\right)\sin(2\varphi)\,.$$

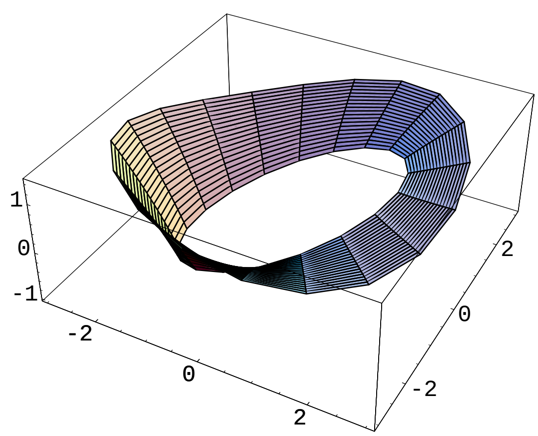

Bild 20 Lösung $u(r,\varphi)$

b) Mit Hilfe von

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

erhält man die Lösung in kartesischen Koordinaten

$$u(x,y) = \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2} - \ln 2}{\ln 3 - \ln 2} + \frac{18x}{5(x^2+y^2)} - \frac{2x}{5} + \frac{xy}{8} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Abgabetermin: 13.06.06 (zu Beginn der Übung)