

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u_{xx} - (2 \sin x)u_{xy} - (\cos^2 x)u_{yy} - (\cos x)u_y = 0.$$

- a) Man bestimme den Typ der Differentialgleichung.
- b) Man transformiere die Differentialgleichung auf Normalform.
- c) Mit den Daten aus b) bestimme man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 14:

Man finde partikuläre Lösungen der Differentialgleichung

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_y = 0$$

mit Hilfe eines Produktansatzes der Form $u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$.

Aufgabe 15:

Die Telegraphengleichung $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0$ beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist die Signalspannung $u(x, t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0, t) = 3 \sin(2t)$, für $t \geq 0$, eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung u für $x \rightarrow \infty$ beschränkt sein.

- a) Man zeige, dass ein Produktansatz der Form $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ nicht zu einer Lösung führt.
- b) Man versuche den Lösungsansatz $u(x, t) = u_0 e^{-ax} \sin(2t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Aufgabe 16:

Man berechne durch einen Separationsansatz der Form $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ eine Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, & x \in (0, \pi), \quad y > 0, \\ u(x, 0) &= \frac{4}{n} \sin 5nx, & x \in [0, \pi], \\ u_y(x, 0) &= 0, \\ u(0, y) &= 0, & y \geq 0, \\ u(\pi, y) &= 0.\end{aligned}$$

und begründe damit, warum keine stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten vorliegt, die Aufgabe also nicht korrekt gestellt ist.

Abgabetermin: 23.05.06 (zu Beginn der Übung)