Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 3

Aufgabe 9:

Gegeben sei das Cauchy-Problem für die nichtlineare skalare Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \quad \text{mit} \quad u(x,0) = u_0(x)\,.$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe der Charakteristikenmetode für die Flussfunktion $f(u) = \dfrac{u^2}{2}$.

b) Man löse das Cauchy-Problem für die Anfangsdaten

(i) $u_0(x) = 2(x+1)$ und
(ii) $u_0(x) = 2(1-x)$,

zeichne die charakteristischen Grundkurven und gebe den Zeitpunkt T an, bis zu dem sich die Lösung eindeutig berechnen lässt.

Lösung:

a) Der quasilinearen Burgers-Gleichung

$$0 = u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = u_t + uu_x$$

wird das erweiterte Problem

$$U_t + uU_x + 0 \cdot U_u = 0$$

zugeordnet. Lösen der Phasendifferentialgleichungen:

$\dot{t}(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad t = s + C_0$

Durch die Parametrisierungsforderung $t(0) = 0$ wird $C_0 = 0$ festgelegt.

Man erhält $t = s \Rightarrow \dfrac{d}{ds} = \dfrac{d}{dt}$.

$u'(t) = 0 \Rightarrow u(t) = C$

$x'(t) = u = C \Rightarrow x = Ct + D \Rightarrow D = x - ut$

Damit wird die allgemeine Lösung durch die folgende implizite Gleichung mit einer C^1-Funktion Φ beschrieben:

$$U(t,x,u) = \Phi\,(u, x - ut) = 0\,.$$

Angenommen diese implizite Lösungsdarstellung lässt sich nach dem Satz über implizite Funktionen nach der ersten Komponente auflösen, so erhält man mit einer unbekannten Funktion ψ die implizite Lösungsdarstellung

$$u(x,t) = \psi\left(x - u(x,t)t\right) \ .$$

b) (i) Die Anfangsbedingung $u(x,0) = 2(x+1)$ führt auf

$$2(x+1) = u(x,0) = \psi\left(x - u(x,0)\cdot 0\right) = \psi(x) \ .$$

Die implizite Lösungsdarstellung der Anfangswertaufgabe lautet also

$$u(x,t) = \psi\left(x - u(x,t)t\right) = 2\left(x - u(x,t)t + 1\right) \ .$$

Auflösen nach u ergibt für alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ die Lösung die explizite Darstellung

$$u(x,t) = \frac{2x+2}{2t+1} \ .$$

Charakteristische Grundkurve: $(x(t),t)$ mit $x(0) = x_0$

$x(t) = Ct + D \Rightarrow x_0 = x(0) = D$ und $C = u(x(t),t) = u(x(0),0) = u_0(x_0)$ also

$$x(t) = u_0(x_0)t + x_0 = 2(x_0+1)t + x_0 \ .$$

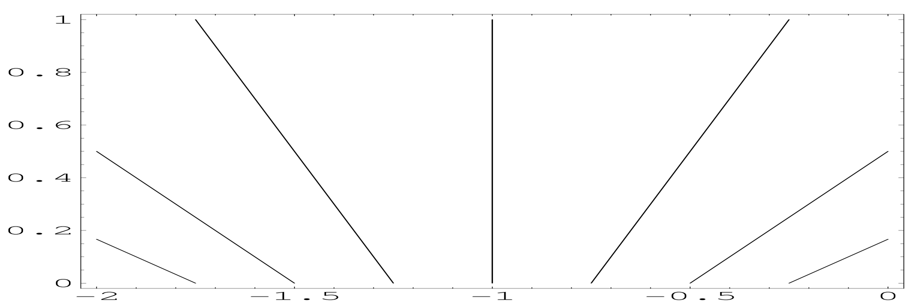

Bild 9 b) (i): $x(t) = 2(x_0+1)t + x_0$

(ii) Die Anfangsbedingung $u(x,0) = 2(1-x)$ führt auf

$$2(1-x) = u(x,0) = \psi\left(x - u(x,0)\cdot 0\right) = \psi(x) \ .$$

Die implizite Lösungsdarstellung der Anfangswertaufgabe lautet also

$$u(x,t) = \psi\left((x - u(x,t)t\right) = 2\left(1 - x + u(x,t)t\right) \ .$$

Auflösen nach u ergibt für alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times \left(0, \frac{1}{2}\right)$ die explizite Darstellung

$$u(x,t) = \frac{2-2x}{1-2t} \ .$$

Für $T = \dfrac{1}{2}$ besitzt diese Lösung eine Singularität.

Charakteristische Grundkurve: $x(t) = 2(1-x_0)t + x_0$.

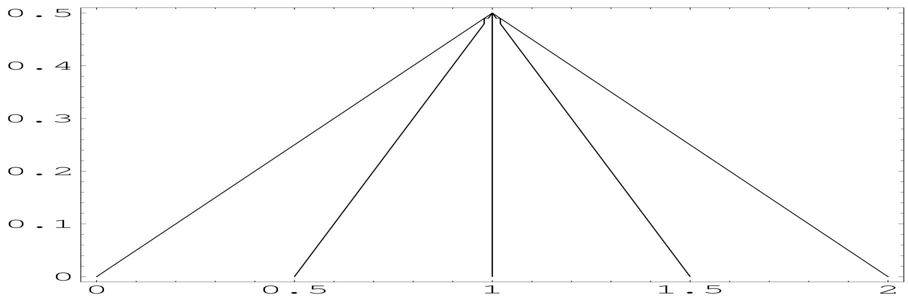

Bild 9 b) (ii): $x(t) = 2(1 - x_0)t + x_0$

Im Punkt $(x,t) = \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ schneiden sich alle charakteristischen Grundkurven.

Aufgabe 10:

Gegeben sei das Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$$

mit

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \leq -2 \\ 1 \ , & -2 < x \leq 0 \\ -1 \ , & 0 < x \ . \end{cases}$$

a) Man berechne die Entropielösung für $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,2)$.

b) Man zeichne $u(x,0)$, $u(x,1)$, $u(x,2)$.

Lösung:

a) Der Sprung von u_0 bei $x_0 = -2$ erzeugt eine Verdünnungswelle u_v.
Mit $u_l = 0 < u_r = 1$ erhält man

$$u_v(x,t) = \begin{cases} 0 \ , & x \leq -2 \\ \dfrac{x+2}{t} \ , & -2 < x \leq -2+t \\ 1 \ , & -2+t < x \end{cases}$$

Die Entropiebedingung

$$u(x+z,t) - u(x,t) < \frac{Cz}{t} \quad \text{für} \quad t,z,C > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

wird von u_v, auf Grund der Stetigkeit von u_v, erfüllt.

Außerdem kann man eine Stoßwelle u_s berechnen. Die Rankine-Hugoniot Bedingung lautet

$$\dot{s} = \frac{1}{2}(u_l + u_r) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad s(t) = \frac{t}{2} + C$$

Mit $s(0) = x_0 = -2$ erhält man die Stoßfront $s_0(t) = \dfrac{t}{2} - 2$ und damit die Stoßwelle.

$$u_s(x,t) = \begin{cases} 0 \ , & x \leq \dfrac{t}{2} - 2 = s(t) \\ 1 \ , & \dfrac{t}{2} - 2 < x \ . \end{cases}$$

Die Entropiebedingung für u_s ergibt z.B für $x = s(t)$ einen Widerspruch

$$u_s(s(t)+z,t) - u_s(s(t),t) = 1 - 0 = 1 < \frac{Cz}{t} \ .$$

Diese Bedingung ist nur für $\dfrac{t}{C} < z$ und nicht für alle $z > 0$ erfüllt. Also ist u_v die Entropielösung.

Der Sprung von u_0 bei $x_1 = 0$ führt nur zu einer Stoßwelle mit $u_l = 1 > u_r = -1$. Eine Verdünnungswelle ist hier nicht definiert.

Die Rankine-Hugoniot Bedingung lautet

$$\dot{s} = \frac{1}{2}(u_l + u_r) = \frac{1}{2}(1-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad s(t) = C$$

Mit $s(0) = x_1 = 0$ erhält man die Stoßfront $s_1(t) = 0$ und damit die Stoßwelle.

$$u_s(x,t) = \begin{cases} 1 \ , & x \le 0 \\ -1 \ , \quad 0 < & x \ . \end{cases}$$

Die Entropiebedingung ist wegen $u(x+z,t) - u(x,t) \le 0 < \dfrac{Cz}{t}$ automatisch erfüllt.

Damit lautet die gesamte Entropielösung also

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 \ , & x \le -2 \\ \dfrac{x+2}{t} \ , & -2 < x \le -2+t \\ 1 \ , & -2+t < x \le 0 \\ -1 \ , & 0 < x \ . \end{cases}$$

Diese Lösung ist jedoch nur für $-2+t \le 0 \ \Rightarrow \ t \le 2 =: T$ definiert, also nur bis zu dem Zeitpunkt, wo die Verdünnungswelle auf die Stoßfront der Stoßwelle trifft.

b)

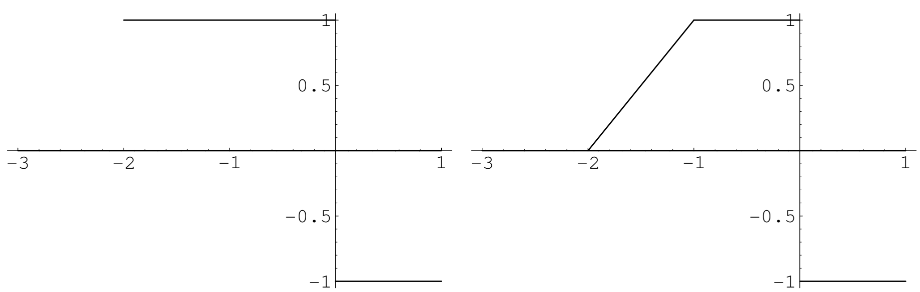

Bild 10 b) (i): $u(x,0)$, $u(x,1)$

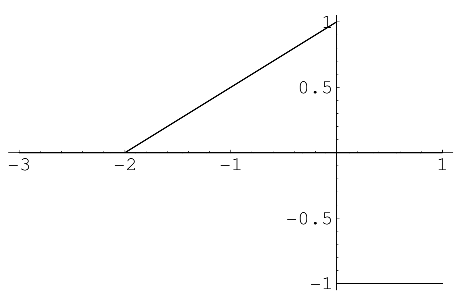

Bild 10 b) (ii): $u(x,2)$

Aufgabe 11:

Man schreibe folgende partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Matrix-Vektorschreibweise, bestimme den Typ und skizziere im $\mathbb{R}^2$ gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_y + x^2 u = 1$,

b) $y^2 u_{xx} - x u_{yy} + 4xu = \sin\ x$,

c) $x u_{xx} + xy u_{xy} + y u_{yy} = 4x^2$,

d) $2u_{xy} + 4u_{xz} + 4u_{yz} + 3u_{zz} = \pi^2 u$.

Lösung:

a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_y + x^2 u = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{A}} \nabla u + (0, -3)\nabla u + x^2 u = 1$

$$\det(\,\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{I}\,) = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0\,,\ \lambda_2 = 2$$

Damit ist die Differentialgleichung in ganz $\mathbb{R}^2$ von parabolischem Typ.

b)
$$y^2 u_{xx} - x u_{yy} + 4xu = \sin\ x$$
$$\Leftrightarrow \quad \nabla^T \underbrace{\begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{A}} \nabla u + 4xu = \sin x$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det\ \boldsymbol{A}\ = -xy^2 \begin{cases} > 0 & \text{(elliptisch)} \qquad \text{für} \quad x < 0 \wedge y \neq 0 \\ = 0 & \text{(parabolisch)} \quad \text{für} \quad x = 0 \vee y = 0 \\ < 0 & \text{(hyperbolisch)} \quad \text{für} \quad x > 0 \wedge y \neq 0 \end{cases}$$

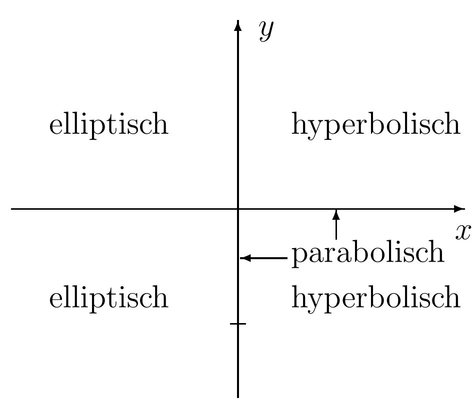

Bild 11 b) Gebiete unterschiedlichen Typs c)

$$xu_{xx} + xyu_{xy} + yu_{yy} = 4x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla^T \underbrace{\begin{pmatrix} x & xy/2 \\ xy/2 & y \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{A}} \nabla u - \left(1+\frac{x}{2}, 1+\frac{y}{2}\right) \nabla u = 4x^2$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det \boldsymbol{A} = xy\left(1-\frac{1}{4}xy\right) \begin{cases} > 0 & \text{(elliptisch)} \quad \text{für} \quad xy > 0 \wedge |y| < \dfrac{4}{|x|} \\ = 0 & \text{(parabolisch)} \quad \text{für} \quad x = 0 \vee y = 0 \vee y = \dfrac{4}{x} \\ < 0 & \text{(hyperbolisch)} \quad \text{für} \quad xy < 0 \vee \left(xy > 0 \wedge |y| > \dfrac{4}{|x|}\right) \end{cases}$$

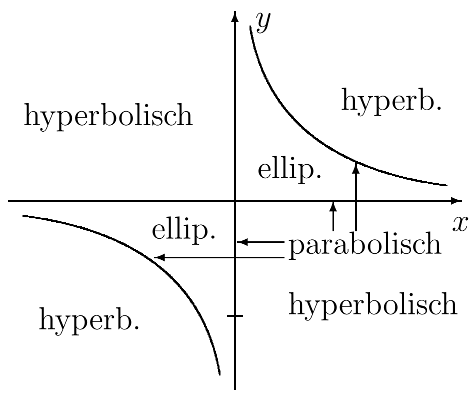

Bild 11 c) Gebiete unterschiedlichen Typs

d) $2u_{xy} + 4u_{xz} + 4u_{yz} + 3u_{zz} = \pi^2 u \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^T \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{A}} \nabla u = \pi^2 u$

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (\lambda+1)^2(\lambda-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -1\,,\ \lambda_3 = 5$$

Damit ist die Differentialgleichung in ganz $\mathbb{R}^3$ von hyperbolischem Typ.

Aufgabe 12:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{14}{5}u_{xx} - \frac{4}{5}u_{xy} + \frac{11}{5}u_{yy} + 2\sqrt{5}u_x - \sqrt{5}u_y + 3u = x$$

a) Man bestimme den Typ der Gleichung und

b) transformiere sie auf Normalform.

Lösung:

a)
$$\frac{14}{5}u_{xx} - \frac{4}{5}u_{xy} + \frac{11}{5}u_{yy} + 2\sqrt{5}u_x - \sqrt{5}u_y + 3u = x$$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla^T \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{14}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{11}{5} \end{pmatrix}}_{=:\,\boldsymbol{A}} \nabla u + (2\sqrt{5}, -\sqrt{5})\nabla u + 3u = x$$

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (\lambda - 2)(\lambda - 3) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2\,,\ \lambda_2 = 3$$

Es handelt sich damit in ganz $\mathbb{R}^2$ um eine elliptische Differentialgleichung.

b) Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ von $\boldsymbol{A}$ und Transformationsmatrix $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit den neuen Variablen $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} := \boldsymbol{S}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

wird die Ausgangsgleichung nach der Kettenregel transformiert und in eine Gleichung in $\tilde{u}(\xi,\eta) := u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ überführt:

$$2\tilde{u}_{\xi\xi} + 3\tilde{u}_{\eta\eta} + 5\tilde{u}_\eta + 3\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\xi + 2\eta)\,.$$

Erneute Transformation mit den Variablen $\mu := \frac{\xi}{\sqrt{2}}$, $\nu := \frac{\eta}{\sqrt{3}}$ führt auf die elliptische Normalform in $\hat{u}(\mu,\nu) := \tilde{u}(\xi(\mu,\nu), \eta(\mu,\nu))$

$$\Delta\hat{u} + \frac{5}{\sqrt{3}}\hat{u}_\nu + 3\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{2}\mu + 2\sqrt{3}\nu)\,.$$

Abgabetermin: 9.05.06 (zu Beginn der Übung)