Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

Gegeben sei das Cauchy-Problem für die nichtlineare skalare Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \quad \text{mit} \quad u(x,0) = u_0(x)\,.$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe der Charakteristikenmetode für die Flussfunktion $f(u) = \dfrac{u^2}{2}$.

b) Man löse das Cauchy-Problem für die Anfangsdaten

(i) $u_0(x) = 2(x+1)$ und

(ii) $u_0(x) = 2(1-x)$,

zeichne die charakteristischen Grundkurven und gebe den Zeitpunkt T an, bis zu dem sich die Lösung eindeutig berechnen lässt.

Aufgabe 10:

Gegeben sei das Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$$

mit

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 0 \;, & x \le -2 \\ 1 \;, & -2 < x \le 0 \\ -1 \;, & 0 < x \;. \end{cases}$$

a) Man berechne die Entropielösung für $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,2)$.

b) Man zeichne $u(x,0)$, $u(x,1)$, $u(x,2)$.

Aufgabe 11:

Man schreibe folgende partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Matrix-Vektorschreibweise, bestimme den Typ und skizziere im $\mathbb{R}^2$ gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_y + x^2 u = 1$,

b) $y^2 u_{xx} - x u_{yy} + 4xu = \sin\ x$,

c) $x u_{xx} + xy u_{xy} + y u_{yy} = 4x^2$,

d) $2u_{xy} + 4u_{xz} + 4u_{yz} + 3u_{zz} = \pi^2 u$.

Aufgabe 12:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{14}{5}u_{xx} - \frac{4}{5}u_{xy} + \frac{11}{5}u_{yy} + 2\sqrt{5}u_x - \sqrt{5}u_y + 3u = x$$

a) Man bestimme den Typ der Gleichung und

b) transformiere sie auf Normalform.

Abgabetermin: 9.05.06 (zu Beginn der Übung)