Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 2

Aufgabe 5:

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

a) $2u_x - yu_y = 0$,

b) $2u_x - yu_y = xyu$.

Lösung:

a) Der linearen homogenen PDG 1.Ordnung in den Variablen (x, y)

$$2u_x - yu_y = 0$$

ist das charakteristisches Differentialgleichungssystem zugeordnet, welches jetzt gelöst wird:

$$\dot{x}(t) = 2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 2t + C_1 \quad \Rightarrow \; t = (x - C_1)/2$$

$$\dot{y}(t) = -y \quad \Rightarrow \quad y(t) = C_2 e^{-t} = C_2 e^{-(x-C_1)/2} = Ce^{-x/2}$$

Auflösen nach C : $\quad C = ye^{x/2}$

Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$u(x, y) = \Phi\left(ye^{x/2}\right)$$

mit einer beliebigen C^1-Funktion Φ .

b) Die Differentialgleichung wird hier als quasilineare PDG 1.Ordnung in den Variablen (x, y) interpretiert. Ihr ist das erweiterte Problem

$$2U_x - yU_y + xyuU_u = 0 \, .$$

zugeordnet. Division durch 2 führt auf

$$U_x - \frac{y}{2}U_y + \frac{xyu}{2}U_u = 0 \, .$$

Die charakteristischen Differentialgleichungen dieses Systems sind sogenannte Phasendifferentialgleichungen, bei denen x mit t identifiziert werden kann, da der Koeffizient vor U_x gleich eins ist.

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= 1 &\Rightarrow\quad & x(t) = t \\
\dot{y}(t) = y'(x) &= -\frac{y}{2} &\Rightarrow\quad & y(x) = C_1 e^{-x/2} \\
\dot{u}(t) = u'(x) &= \frac{xyu}{2} && \\
&= \frac{C_1 x e^{-x/2}}{2} \cdot u &\Rightarrow\quad & \ln|u| = \int \frac{C_1 x e^{-x/2}}{2}\, dx = -C_1(x+2)e^{-x/2} + C_2
\end{aligned}$$

Auflösen nach C_1 und C_2:

$y(x) = C_1 e^{-x/2} \quad \Rightarrow \quad C_1 = y e^{x/2}$

$\ln|u| = -C_1(x+2)e^{-x/2} + C_2 = -y(x+2) + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \ln|u| + y(x+2)$

Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch die implizite Gleichung

$$U(x,y,u) = \Phi\left(y e^{x/2}, \ln|u| + y(x+2)\right) = 0$$

mit einer beliebigen C^1-Funktion Φ.

Aufgabe 6:

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen für die gesuchte Funktion $u = u(x, y, z)$

a) $xu_x + 2yu_z = u$,

b) $zu_{xy} - yu_{xx} = 0$, Hinweis: Man substituiere $u_x = v$.

Lösung:

a) Die Differentialgleichung wird wieder als quasilineare PDG 1.Ordnung in den Variablen (x, y, z) interpretiert. Ihr ist das erweiterte Problem

$$xU_x + 2yU_z + uU_u = 0 \, .$$

zugeordnet. Division durch $x \neq 0$ führt auf

$$U_x + \frac{2y}{x}U_z + \frac{u}{x}U_u = 0 \, .$$

Da der Koeffizient vor U_x wieder gleich eins ist, werden nur noch die Phasendifferentialgleichungen, bei denen x mit t identifiziert wird, gelöst:

$$\begin{aligned} y'(x) &= 0 & &\Rightarrow \quad y(x) = C_1 \\ z'(x) &= \frac{2y}{x} = \frac{2C_1}{x} & &\Rightarrow \quad z(x) = 2C_1 \ln|x| + C_2 \\ u'(x) &= \frac{u}{x} & &\Rightarrow \quad u(x) = C_3 x \end{aligned}$$

Auflösen nach C_1, C_2 und C_3 :

$C_1 = y \, , \quad C_2 = z - 2C_1 \ln|x| = z - 2y \ln|x| \, , \quad C_3 = \dfrac{u}{x} \, .$

Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch die implizite Gleichung

$$U(x, y, z, u) = \Phi\left(y, z - 2y \ln|x|, \frac{u}{x}\right) = 0$$

mit einer beliebigen C^1-Funktion Φ .

b) Man substituiere in der Differentialgleichung $u_x = v$. Dies liefert

$$zu_{xy} - yu_{xx} = 0 \quad \Rightarrow \quad zv_y - yv_x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x - \frac{z}{y}v_y = 0$$

Charakteristische Gleichungen bzw Phasendifferentialgleichungen:

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = -\frac{z}{y}, \quad \dot{z} = 0.$$

$\dot{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = t + C_0$

Durch die Parametrisierungsforderung $x(0) = 0$ wird $C_0 = 0$ festgelegt.

Man erhält $x = t \;\Rightarrow\; \dfrac{d}{dt} = \dfrac{d}{dx}$.

$z'(x) = 0 \;\Rightarrow\; z = C_1$

$y'(x) = -\dfrac{z}{y} = -\dfrac{C_1}{y} \;\Rightarrow\; yy' = -C_1$

$\Rightarrow\; \dfrac{y^2}{2} = -C_1 x + C_2 = -zx + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = \dfrac{y^2}{2} + zx$

Allgemeine Lösung bzgl. v :

$v(x, y, z) = \Phi\left(z, \dfrac{1}{2}y^2 + zx\right)$ mit einer beliebigen C^1 -Funktion Φ .

Allgemeine Lösung bzgl. u durch Rücksubstitution:

$u_x = \Phi\left(z, \dfrac{1}{2}y^2 + zx\right) = \Phi(C_1, C_2) \;\Rightarrow\; u(x, y) = \Phi\left(z, \dfrac{1}{2}y^2 + zx\right) \cdot x + \psi(y, z)$

Aufgabe 7:

Man bestimme eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$3(u-y)^2 u_x - u_y = 0, \quad u(0,y) = y$$

a) mit Hilfe der Charakteristikenmethode und

b) mit Hilfe eines Summenansatzes $\quad u(x,y) = f(x) + g(y)\,.$

Lösung:

a) $3(u-y)^2 u_x - u_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3(u-y)^2 u_x + u_y = 0$

Lösen der erweiterten Phasendifferentialgleichungen bzgl. y

$\dot{y}(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(t) = t + C_0 \quad .$

Durch die Parametrisierungsforderung $y(0) = 0$ wird $C_0 = 0$ festgelegt.

Man erhält $y = t \Rightarrow \dfrac{d}{dt} = \dfrac{d}{dy}$ und

$u'(y) = 0 \Rightarrow u = C_2$

$x'(y) = -3(u-y)^2 = -3(C_2 - y)^2 \Rightarrow x = (C_2 - y)^3 + C_1 = (u-y)^3 + C_1$

$\Rightarrow C_1 = x - (u-y)^3 \quad .$

Damit wird die allgemeine Lösung durch die folgende implizite Gleichung mit einer C^1-Funktion Φ beschrieben:

$$U(x,y,u) = \Phi\left(x - (u-y)^3, u\right) = 0\,.$$

Anpassen an die Anfangsfunktion:

Angenommen die implizite Lösungsdarstellung

$$\Phi\left(x - (u-y)^3, u\right) = 0$$

lässt sich nach dem Satz über implizite Funktionen nach der ersten Komponente auflösen, so erhält man mit einer unbekannten Funktion ψ

$$x - (u-y)^3 = \psi\,(u)\ .$$

Die Anfangsbedingung $u(0,y) = y$ führt dann auf

$$\psi\,(u(0,y)) = \psi(y) = 0 - (u(0,y) - y)^3 = 0 \Rightarrow x - (u-y)^3 = 0\,.$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet also

$$u(x,y) = y + \sqrt[3]{x}\,.$$

b) Die Anfangsbedingung $u(0,y) = y$ führt in den Summenansatz $u(x,y) = f(x) + g(y)$ eingesetzt auf

$u(0,y) = f(0) + g(y) = y \quad \Rightarrow \quad g(y) = y - f(0)$

$\Rightarrow \quad u(x,y) = f(x) + y - f(0) \quad \Rightarrow \quad u_x = f'(x)\,, \quad u_y = 1$

In die Differentialgleichung einsetzen

$0 = 3(u-y)^2 u_x - u_y = 3(f(x)+y-f(0)-y)^2 f'(x) - 1 \quad \Rightarrow \quad 3(f(x)-f(0))^2 f'(x) = 1$

Integration nach x liefert

$(f(x) - f(0))^3 = x + k \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(0) + \sqrt[3]{x+k}$

Eingesetzt in den Summenansatz

$u(x,y) = f(x) + g(y) = f(0) + \sqrt[3]{x+k} + y - f(0) = \sqrt[3]{x+k} + y$

Anwenden der Anfangsbedingung

$y = u(0,y) = \sqrt[3]{0+k} + y \quad \Rightarrow \quad k = 0$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet also

$$u(x,y) = y + \sqrt[3]{x}\,.$$

Aufgabe 8:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$u_x + 2xu_y = y\ .$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung.

b) Man bestimme mit dem Ergebnis aus a) die Lösung, die der Anfangsbedingung $u(0, y) = 1 + y^2$ genügt.

c) Man führe die Probe für die berechnete Lösung aus b) durch.

d) Man bestimme mit dem Ergebnis aus a) die Lösung, die der Anfangsbedingung $u\left(x, x^2 + 1\right) = 3x$ genügt.

Lösung:

a)

$$u_x + 2xu_y = y \quad \Rightarrow \quad U_x + 2xU_y + yU_u = 0$$

Lösen der Phasendifferentialgleichungen:

$\dot{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = t + C_0$

Durch die Parametrisierungsforderung $x(0) = 0$ wird $C_0 = 0$ festgelegt.

Man erhält $x = t \ \Rightarrow\ \dfrac{d}{dt} = \dfrac{d}{dx}$.

$y' = 2x \ \Rightarrow\ y = x^2 + C_1 \ \Rightarrow\ C_1 = y - x^2$

$u' = y = x^2 + C_1 \ \Rightarrow\ u = \dfrac{x^3}{3} + C_1 x + C_2 = \dfrac{x^3}{3} + xy - x^3 + C_2 \ \Rightarrow\ C_2 = u + \dfrac{2x^3}{3} - xy$

Damit wird die allgemeine Lösung durch die folgende implizite Gleichung mit einer C^1-Funktion Φ beschrieben:

$$U(x, y, u) = \Phi\left(y - x^2, u + \frac{2x^3}{3} - xy\right) = 0\ .$$

b) Angenommen die implizite Lösungsdarstellung

$$\Phi\left(y - x^2, u + \frac{2x^3}{3} - xy\right) = 0$$

lässt sich nach dem Satz über implizite Funktionen nach der zweiten Komponente auflösen, so erhält man mit einer unbekannten Funktion ψ

$$u + \frac{2x^3}{3} - xy = \psi\left(y - x^2\right) \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = xy - \frac{2x^3}{3} + \psi\left(y - x^2\right)\ .$$

Die Anfangsbedingung $u(0, y) = 1 + y^2$ führt auf

$$1 + y^2 = u(0, y) = \psi\left(y\right)$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet also

$$u(x, y) = xy - \frac{2x^3}{3} + 1 + (y - x^2)^2$$

c) Probe Anfangsbedingung:

$$u(0,y) = 0 \cdot y - \frac{2 \cdot 0^3}{3} + 1 + (y - 0^2)^2 = 1 + y^2$$

Probe Differentialgleichung:

$$u_x + 2xu_y = y - 2x^2 - 4x(y - x^2) + 2x(x + 2(y - x^2)) = y$$

d) Wie unter b) versuchen wir mit der Darstellung

$$u(x,y) = xy - \frac{2x^3}{3} + \psi\left(y - x^2\right) .$$

die Anfangsbedingung $u\left(x, x^2+1\right) = 3x$ zu erfüllen.

$$3x = u\left(x, x^2+1\right) = x(x^2+1) - \frac{2x^3}{3} + \psi\left(x^2 + 1 - x^2\right) = x + \frac{x^3}{3} + \psi\left(1\right) \Rightarrow \psi(1) = 2x - \frac{x^3}{3}.$$

Dies ist ein Widerspruch und die Anfangswertaufgabe ist deshalb nicht lösbar.

Der Grund dafür liegt darin, dass die Kurve $\left(x, x^2+1\right)$, auf der für die Funktion u Werte vorgeschrieben werden sollen, eine (Grund-)Charakteristik ist (vgl. a) mit $C_1 = 1$). Auf dieser soll u jedoch schon die Phasendifferentialgleichung $u' = y$ erfüllen:

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = -\frac{2x^3}{3} + xy + C_2 \quad \Rightarrow \quad u(x, x^2+1) = \frac{x^3}{3} + x + C_2 \, .$$

Abgabetermin: 25.04.06 (zu Beginn der Übung)