Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 1

Aufgabe 1:

a) Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(i) $u_x + u^2 u_y = 3x + 4y - 6u + 5\,,$

(ii) $u_{xy} + y^2 u_y^2 = e^u + x^2 + y^2\,,$

(iii) $u_{xx}^2 + x^2 u_{yy} = 1 + 2x + 3y + 4u + 5u_x + 6u_y\,,$

(iv) $\ln(u_x + u_y) + u_x + u_y = 1\,,$

(v) $\begin{pmatrix} xu_x \\ xv_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -u_y \end{pmatrix}.$

b) Man zeige, dass folgende Funktionen harmonisch sind:

(i) $u_1(x,y) = x^3 - 3xy^2$

(ii) $u_2(x,y) = 3x^2y - y^3$

(iii) $u_3(x,y) = e^x \cos y$

(iv) $u_4(x,y) = \mathrm{Im}(e^z + z) + 6\mathrm{Re}(z)$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Lösung:

a) (i) $u_x + u^2 u_y = 3x + 4y - 6u + 5\,,$ skalar, quasilinear, 1. Ordnung

(ii) $u_{xy} + y^2 u_y^2 = e^u + x^2 + y^2\,,$ skalar, semilinear, 2. Ordnung

(iii) $u_{xx}^2 + x^2 u_{yy} = 1 + 2x + 3y + 4u + 5u_x + 6u_y\,,$ skalar,nichtlinear, 2. Ordnung

(iv) $\ln(u_x + u_y) + u_x + u_y = 1\,,$ skalar, nichtlinear, 1. Ordnung,

(v) $\begin{pmatrix} xu_x \\ xv_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -u_y \end{pmatrix}$, vektoriell, linear, 1. Odnung

b) (i) $\Delta u_1 = (x^3 - 3xy^2)_{xx} + (x^3 - 3xy^2)_{yy} = 6x - 6x = 0$

(ii) $\Delta u_2 = (3x^2y - y^3)_{xx} + (3x^2y - y^3)_{yy} = 6y - 6y = 0$

(iii) $\Delta u_3 = (e^x \cos y)_{xx} + (e^x \cos y)_{yy} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$

(iv) $\Delta u_4 = (e^x \sin(y) + y + 6x)_{xx} + (e^x \sin(y) + y + 6x)_{yy} = e^x \sin(y) - e^x \sin(y) = 0$.

Aufgabe 2:

Man berechne die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

a) $u_{yy} + 2xu_y + (x^2 - 1)u = x^2y^2 - y^2 + 4xy + 2\,,$

b) $u_{xy} = e^x + \cos y + 1\,,$

c) $(x^2 - 1)u_{xy} = 2u_y\,.$

Lösung:

a) Fasst man x als Parameter auf, so kann diese partielle Differentialgleichung als gewöhnliche Differentialgleichung aufgefasst werden in $v(y) := u(x, y)$:

$$v'' + 2xv' + (x^2 - 1)v = x^2y^2 - y^2 + 4xy + 2\,.$$

Lösung der homogenen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v'' + 2xv' + (x^2 - 1)v = 0$$

mit dem üblichen Ansatz $v(y) = e^{\lambda y}$, dabei kann λ von x abhängen, also $\lambda = \lambda(x)$ gelten.

$p(\lambda) = \lambda^2 + 2x\lambda + x^2 - 1 = (\lambda + x)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -x \pm 1$

$\Rightarrow \quad v_h(x) = c_1(x)e^{(-x+1)y} + c_2(x)e^{(-x-1)y}$

mit beliebigen Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$.

Lösung der inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v'' + 2xv' + (x^2 - 1)v = x^2y^2 - y^2 + 4xy + 2$$

mit dem üblichen Ansatz $v_p(y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$:

$v'' + 2xv' + (x^2 - 1)v = 2a + 2x(2ay + b) + (x^2 - 1)(ay^2 + by + c)$

$= a(x^2 - 1)y^2 + (4ax + b(x^2 - 1))y + (2a + 2bx + c(x^2 - 1)) = (x^2 - 1)y^2 + 4xy + 2$

$\Rightarrow \quad -y^2a = -y \ \wedge\ -y^2b = y^3 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \ \wedge\ b = 0 \ \wedge\ c = 0 \quad \Rightarrow \quad v_p(x) = y^2$

$\Rightarrow \quad u(x, y) = v_h(x) + v_p(x) = c_1(x)e^{(-x+1)y} + c_2(x)e^{(-x-1)y} + y^2$

b) $u_{xy} = (u_x)_y = e^x + \cos y + 1 \quad \Rightarrow \quad u_x = ye^x + \sin y + y + c(x)$

$\Rightarrow \quad u(x, y) = ye^x + x\sin y + yx + f(x) + g(y)$

mit beliebigen und differenzierbaren Funktion g und f, wobei $f'(x) = c(x)$ gilt.

c) Setze $v(x, y) := u_y(x, y)$, dann erhält man:

$(x^2 - 1)u_{xy} = 2u_y \quad \Rightarrow \quad v_x = \dfrac{2v}{x^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{v_x}{v} = \dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{x + 1}$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} dx \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + k(y)$

$\Rightarrow \quad u_y = v = c(y) \cdot \dfrac{x - 1}{x + 1} \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = g(y) \cdot \dfrac{x - 1}{x + 1} + f(x)$

mit beliebigen und differenzierbaren Funktion f und g, wobei $g'(y) = c(y)$ gilt.

Aufgabe 3:

Man berechne mit Hilfe von Exponentialansätzen reelle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $u(x,y) = e^{\alpha x + \beta y}$ für

(i) $u_{xy} + u_x - u_y - u = 0$,

(ii) $u_{xx} + u_{yy} = 0$,

b) $u(x,y,t) = e^{\alpha x + \beta y + \gamma t}$ für $u_t = u_{xx} + u_{yy} + 2u$.

Lösung:

a) $u(x,y) = e^{\alpha x + \beta y} \quad \Rightarrow$

$u_x = \alpha u\ , \quad u_y = \beta u\ , \quad u_{xx} = \alpha^2 u\ , \quad u_{xy} = \alpha\beta u\ , \quad u_{yy} = \beta^2 u$

(i) $0 = u_{xy} + u_x - u_y - u = \alpha\beta u + \alpha u - \beta u - u$

$\overset{u \neq 0}{\Rightarrow} \quad \alpha(\beta + 1) = \beta + 1 \quad \Rightarrow$

$\alpha = 1$, d.h. $u(x,y) = e^{x+\beta y}$ oder $\beta = -1$, d.h. $u(x,y) = e^{\alpha x - y}$

(ii) $0 = u_{xx} + u_{yy} = \alpha^2 u + \beta^2 u \quad \overset{u \neq 0}{\Rightarrow} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \pm i\alpha$

$\Rightarrow \quad u(x,y) = e^{\alpha x \pm i\alpha y} = e^{\alpha x}(\cos(\alpha y) \pm i \sin(\alpha y))$

reelle Lösungen sind damit

$u_1(x,y) = e^{\alpha x}\cos(\alpha y)$ und $u_2(x,y) = e^{\alpha x}\sin(\alpha y)$

b) $u(x,y,t) = e^{\alpha x + \beta y + \gamma t} \quad \Rightarrow \quad u_t = \gamma u\ , \quad u_{xx} = \alpha^2 u\ , \quad u_{yy} = \beta^2 u$

$u_t = u_{xx} + u_{yy} + 2u \quad \Rightarrow \quad \gamma u = \alpha^2 u + \beta^2 u + 2u$

$\overset{u \neq 0}{\Rightarrow} \quad \gamma = \alpha^2 + \beta^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad u(x,y,t) = e^{\alpha x + \beta y + (\alpha^2 + \beta^2 + 2)t}$

Aufgabe 4:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$3u_x - 4u_y = 7\,, \quad u\,(x,0) = e^x.$$

Hinweis: Durch eine geeignete lineare Transformation

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y \\ \eta &= \gamma x + \delta y \end{aligned}$$

mit $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ transformiere man die Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Lösung:

Mit $u(x,y) = w(\xi(x,y), \eta(x,y))$ transformieren sich die partiellen Ableitungen in der Differentialgleichung nach der Kettenregel

$$u_x = w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x\,, \quad u_y = w_\xi \xi_y + w_\eta \eta_y\,,$$

mit $\xi_x = \alpha$, $\eta_x = \gamma$, $\xi_y = \beta$ und $\eta_y = \delta$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} 7 &= 3(w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x) - 4(w_\xi \xi_y + w_\eta \eta_y) \\ &= w_\xi(3\xi_x - 4\xi_y) + w_\eta(3\eta_x - 4\eta_y) \\ &= w_\xi(3\alpha - 4\beta) + w_\eta(3\gamma - 4\delta)\,. \end{aligned}$$

Durch geschickte Wahl der noch unbestimmten Koeffizienten α, β, γ und δ der linearen Transformation kann man einen Koeffizienten der transformierten Differentialgleichung gleich Null setzten und den anderen eindeutig festlegen unter Berücksichtigung von $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ (reguläre Transformation). Beispielsweise führt die Wahl

$$\alpha = 4,\ \beta = 3,\ \gamma = 0,\ \delta = 1 \ \Leftrightarrow \ \begin{aligned} \xi &= 4x + 3y \\ \eta &= y \end{aligned} \ \Leftrightarrow \ \begin{aligned} x &= (\xi - 3\eta)/4 \\ y &= \eta \end{aligned}$$

auf die transformierte Differentialgleichung

$$-4w_\eta(\xi, \eta) = 7\,.$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Variablen η mit dem Parameter ξ . Integration führt auf die Lösung

$$w(\xi, \eta) = -\frac{7}{4}\eta + g(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad u(x,y) = -\frac{7}{4}y + g(4x + 3y)\,.$$

Die Anfangsvorgabe wird verwendet, um die noch unbestimmte Funktion g festzulegen

$$u(x,0) = g(4x) = e^x \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = e^{x/4}\,.$$

Damit lautet die Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$u(x,y) = -\frac{7}{4}y + e^{x + 3y/4}\,.$$

Abgabetermin: 11.04.06 (zu Beginn der Übung)