Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

a) Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(i) $u_x + u^2 u_y = 3x + 4y - 6u + 5\,,$

(ii) $u_{xy} + y^2 u_y^2 = e^u + x^2 + y^2\,,$

(iii) $u_{xx}^2 + x^2 u_{yy} = 1 + 2x + 3y + 4u + 5u_x + 6u_y\,,$

(iv) $\ln(u_x + u_y) + u_x + u_y = 1\,,$

(v) $\begin{pmatrix} xu_x \\ xv_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -u_y \end{pmatrix}.$

b) Man zeige, dass folgende Funktionen harmonisch sind:

(i) $u_1(x,y) = x^3 - 3xy^2$

(ii) $u_2(x,y) = 3x^2y - y^3$

(iii) $u_3(x,y) = e^x \cos y$

(iv) $u_4(x,y) = \mathrm{Im}(e^z + z) + 6\mathrm{Re}(z)$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2:

Man berechne die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

a) $u_{yy} + 2xu_y + (x^2 - 1)u = x^2y^2 - y^2 + 4xy + 2\,,$

b) $u_{xy} = e^x + \cos y + 1\,,$

c) $(x^2 - 1)u_{xy} = 2u_y\,.$

Aufgabe 3:

Man berechne mit Hilfe von Exponentialansätzen reelle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $u(x, y) = e^{\alpha x + \beta y}$ für

(i) $u_{xy} + u_x - u_y - u = 0$,

(ii) $u_{xx} + u_{yy} = 0$,

b) $u(x, y, t) = e^{\alpha x + \beta y + \gamma t}$ für $u_t = u_{xx} + u_{yy} + 2u$.

Aufgabe 4:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$3u_x - 4u_y = 7\,, \quad u\,(x, 0) = e^x.$$

Hinweis: Durch eine geeignete lineare Transformation

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y \\ \eta &= \gamma x + \delta y \end{aligned}$$

mit $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ transformiere man die Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Abgabetermin: 11.04.06 (zu Beginn der Übung)