Aufgabe 1:

Bestimmen Sie mit Hilfe der Fourier–Methode die Lösung der folgenden Anfangs-randwertaufgaben.

a)

$$
\begin{array}{ll}
v_{tt} = 4v_{xx} & 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\
v(x,0) = -\sin(\pi x) & 0 < x < 1\,, \\
v_t(x,0) = \sin(2\pi x) & 0 < x < 1\,, \\
v(0,t) = v(1,t) = 0 & t > 0.
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{ll}
u_{tt} = 4u_{xx} & 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\
u(x,0) = x - \sin(\pi x) & 0 < x < 1\,, \\
u_t(x,0) = \sin(2\pi x) & 0 < x < 1\,, \\
u(0,t) = 0 & t > 0\,, \\
u(1,t) = 1 & t > 0\,.
\end{array}
$$

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass die reellen Fourier–Koeffizienten der ungerade und 2–periodisch fortgesetzten Funktion $g(y) = y^2 - y,\ 0 \le y \le 1$, gegeben sind durch

$$
a_k = 0\,, \quad b_k = \begin{cases} 0 & \text{für k gerade,} \\ -\dfrac{8}{(k\pi)^3} & \text{für k ungerade.} \end{cases}
$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes und unter Verwendung von a) die Lösung der Randwertaufgabe

$$
\begin{array}{ll}
\Delta u(x,y) = 0 & x \in (0,1),\ y \in (0,1), \\
u(x,0) = 0 & x \in (0,1)\,, \\
u(x,1) = 0 & x \in (0,1)\,, \\
u(0,y) = g(y) = y^2 - y & y \in (0,1)\,, \\
u(1,y) = 0 & y \in (0,1)\,,
\end{array}
$$