Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2005**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}
u_t \,-\, u_{xx} \,&=\, \sin(x)\,t && 0 < x < \pi\,,\ 0 < t\,,\\
u(x,0) \,&=\, \sin(x) && 0 \le x \le \pi,\\
u(0,t) \,&=\, 0 && 0 \le t,\\
u(\pi,t) \,&=\, 1 && 0 \le t.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

a) Leiten Sie analog zur Vorgehensweise für das Dirichletproblem in der Vorlesung für das folgende Neumann Problem eine Reihendarstellung der Lösung her.

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0,\\
u(x,0) &= g(x), & 0 < x < 1,\\
u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0 & t > 0.
\end{aligned}$$

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe aus a) mit $g(x) = 1 + \cos(2\pi x)$.

Aufgabe 3: (Aus Ansorge/Oberle Band II) Am Anfangsort $x = 0$ eines sehr langen Übertragungskabels werde ein Signal der periodischen Spannung

$$U(0,t) \,=\, U_0 \cos(\omega t) \qquad t \ge 0$$

eingespeist. Gesucht werde die Signalspannung $U(x,t)$ des Ausgangssignals für $x > 0, t > 0$. Man erhält U als Lösung der sogenannten Telegraphengleichung

$U_{tt} \,-\, c^2 U_{xx} \,+\, (\alpha+\beta)U_t \,+\, \alpha\beta U \,=\, 0$. Dabei sind α, β, c konstruktionsbedingte positive Kenngrößen des Problems. Ein zeitlich periodisches Eingangssignal läßt nach einer gewissen Einschwingphase ein zeitlich periodisches Ausgangssignal erwarten. Außerdem fordert man

$$U(x,t) \quad \text{beschränkt für} \quad x \to \infty\,.$$

a) Zeigen Sie, dass der Produktansatz $U(x,t) = w(x)\cdot v(t)$ hier nicht zum Erfolg führt!

b) Versuchen Sie es mit einem Lösungsansatz, der eine örtliche Dämpfung mit einem zeitlich periodischem Verlauf verbindet und eine lineare ortsabhängige Phasenverschiebung zuläßt. Wählen Sie exemplarisch $\alpha = \beta = c = 1$.

Aufgabe 4:

Schwingungsverhalten einer kreisförmigen Membran:

Kleine Auslenkungen $u(x, y, t)$ einer im Gleichgewichtszustand in der (x, y)–Ebene liegenden Membran unter Spannungskräften, werden durch die Wellengleichung:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$$

beschrieben. Dabei gilt $c^2 =$ Spannung/Flächendichte. Ist der Rand der Membran fest eingespannt, so ergibt sich die Randbedingung

$$u(x, y, t) = 0 \qquad \text{auf} \quad \partial M : x^2 + y^2 = R^2.$$

Durch die Vorgabe der Anfangsauslenkung $u(x, y, 0) = g(x, y)$ und der Anfangsgeschwindigkeit $u_t(x, y, 0) = h(x, y)$ ergibt sich ein Anfangsrandwertproblem.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Randwerte eine Reihendarstellung der Lösung der Differentialgleichung. Eine Anpassung an die Anfangswerte würde hier zu weit führen und ist daher nicht verlangt!

Hinweise:

- Verwenden Sie Polarkoordinaten und einen geeigneten Produktansatz.
- Beachten Sie z. Bsp. den Vorlesungsabschnitt zu den Zylinderfunktionen.
- Aus physikalischen Gründen (Die Membran soll heil bleiben!!) kommen nur Lösungen in Frage, die im Ursprung beschränkt sind. Die Neumannschen Funktionen sind nicht beschränkt in Null!
- Nullstellen spezieller Funktionen müssen nicht berechnet werden. Es genügt, ihnen Namen zu geben. Benötigt man z. Bsp. in der Lösungsdarstellung die Nullstellen der Neumannschen Funktionen N_n, nennt man sie etwa N_n^m und arbeitet mit dieser Bezeichnung weiter.

Abgabetermin: 4.7.2005