

## Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 6

#### Aufgabe 1:

Sei  $K$  der Kreisringsektor  $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, 1 < x^2 + y^2 < 9\}$  und  $(r, \varphi)$  wie üblich die Polarkoordinatendarstellung von  $(x, y)$ .

Lösen Sie das folgende Randwertproblem:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{auf } K \\ u &= \begin{cases} \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) & r = 3 \\ 0 & \text{auf dem Rest von } \partial K \end{cases} \end{aligned}$$

und berechnen Sie alle Extrema von  $u$  auf  $\overline{K}$ .

#### Aufgabe 2:

Lösen Sie das folgende Dirichletproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, && 0 < x, y < \pi, \\ u(x, 0) &= 1 - \frac{x}{\pi} + \sin(2x), \\ u(x, \pi) &= 0, \\ u(0, y) &= 1 - \frac{y}{\pi} + \sin^3(y), \\ u(\pi, y) &= 0. \end{aligned}$$

#### Aufgabe 3:

Sei  $u$  die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= -1 && |x| < 1, |y| < 1, \\ u(x, y) &= 0 && |x| = 1 \text{ oder } |y| = 1. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Funktion  $v(x, y) = u(x, y) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$  eine obere und eine untere Schranke für  $u(0, 0)$ .

**Aufgabe 4:** (Klausur 2003, Prof. Struckmeier)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Fourier-Methode die Lösungen der folgenden Anfangsrandwertaufgaben.

a)

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad 0 < x < \pi, t \in \mathbb{R}^+,$$

$$u(x, 0) = \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(4x)}{4} \quad 0 < x < \pi$$

$$u(\pi, t) = u(0, t) = 0 \quad t > 0.$$

b)

$$v_t - v_{xx} = 0 \quad 0 < x < \pi, t \in \mathbb{R}^+,$$

$$v(x, 0) = \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{x}{\pi} \quad 0 < x < \pi$$

$$v(0, t) = 0 \quad t > 0$$

$$v(\pi, t) = 1 \quad t > 0.$$

**Abgabetermin:** 21.6.2005