Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2005**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = u_{xx} & x \in (0, \pi),\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin(x) + x & x \in [0, \pi], \\ u_t(x,0) = 2 - \frac{x}{\pi} & x \in [0, \pi], \\ u(0,t) = \phi_1(t) := t & t > 0, \\ u(\pi,t) = \phi_2(t) := \pi & t > 0. \end{array}$$

Hinweis: Eine Aufgabe diesen Typs kann man z. B. lösen, indem man die Funktion v über

$$v(x,t) = u(x,t) - \phi_1(t) - \frac{x-a}{b-a}\,(\phi_2(t) - \phi_1(t))$$

definiert und in der Aufgabenstellung die u–Ausdrücke durch geeignete v–Ausdrücke ersetzt. $[a, b]$ sei hierbei das Anfangsintervall, hier also $[0, \pi]$.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie eine rotationssymmetrische Lösung $u(\boldsymbol{x}, t) = \tilde{u}(r, t)$ der folgenden Anfangswertaufgabe:

$$u_{tt} = c^2 \Delta_3 u, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ r = \|\boldsymbol{x}\|_2,\ t > 0,$$

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = \frac{1}{r+1}, \qquad u_t(\boldsymbol{x}, 0) = 0\,.$$

Hinweis: Beachten Sie Satz 5.4 der Vorlesung.

b) Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Liouvillschen Lösungsformel (vgl. Satz 5.6 der Vorlesung).

$$u_{tt} - c^2 \Delta_3 u = 0, \qquad \boldsymbol{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3,\ t \geq 0$$

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = y(x + y + z), \qquad u_t(\boldsymbol{x}, 0) = 0\,.$$

Aufgabe 3:

a) Lösen Sie das folgende Dirichletsche Problem auf dem Kreis $r^2 = x^2 + y^2 \leq 4$.

$$\begin{array}{ll} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 & 0 \leq r < 2 \\ u(2,\varphi) = \cos^2(\varphi) & \varphi \in \mathbb{R}. \end{array}$$

b) Bestimmen Sie eine Lösung der Aufgabe

$$\begin{array}{rl} \Delta(u) = 0 & \text{für } 1 < x^2 + y^2 < 4, \\ u(x,y) = 1 & \text{auf } x^2 + y^2 = 1, \\ u(x,y) = 2 & \text{auf } x^2 + y^2 = 4. \end{array}$$

Geben Sie die Lösungen auch in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes eine Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{array}{l} \Delta(u) = 0 \quad \text{auf } \; R := [0,1] \times [0,3] \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad y \in [0,3], \\ u(x,0) = 0, \; u(x,3) = \sin(\pi x), \quad x \in [0,1]. \end{array}$$

Abgabetermin: 7.6.2005