

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

- a) Man bestimme den Typ der Differentialgleichung.
- b) Man transformiere die Differentialgleichung auf Normalform.
- c) Man berechne die allgemeine Lösung der Normalform.
- d) Man gebe durch Rücktransformation die allgemeine Lösung in u an.

Aufgabe 2:

Man löse das folgende Randwertproblem

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 && \text{für } 0 < x, y < 1, \\ u(0, y) &= y && \text{für } 0 \leq y \leq 1, \\ u(1, y) &= -y \\ u(x, 0) &= 0 && \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ u(x, 1) &= 1 - 2x^2.\end{aligned}$$

Dazu gehe man wie folgt vor:

- a) Für die Funktion $w(x, y) = a + bx + cy + dxy$, die $\Delta w = 0$ erfüllt, bestimme man die unbekanntenen Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ derart, dass $w(0, y) = y$ und $w(1, y) = -y$ gilt.
- b) Man setze $v(x, y) := u(x, y) - w(x, y)$ und gebe das resultierende Randwertproblem für v an.
- c) Man löse das Problem in v , wobei die sich aus einem Produktansatz ergebenden Lösungsdarstellungen verwendet werden dürfen.