

## Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 2

**Aufgabe 5:** Man ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$zu_{xy} - yu_{xx} = 0$$

für die gesuchte Funktion  $u = u(x, y, z)$ .

Hinweis: Substituiere  $u_x = v$ .

**Aufgabe 6:** Man löse

$$u_x + 2xu_y = y, \quad u(0, y) = 1 + y^2$$

- mit Hilfe der Charakteristikenmethode.
- mit Hilfe der Phasendifferentialgleichungen indem man  $x$  als unabhängige Variable einführt.
- mit Hilfe der Phasendifferentialgleichungen indem man  $y$  als unabhängige Variable einführt.

Man prüfe das Ergebnis durch Einsetzen nach.

**Aufgabe 7:**

- Man passe die allgemeine Lösung von  $u_x + 2xu_y = y$  an die Anfangswerte  $u(x, x^2 + 1) = 3x$  an und prüfe das Ergebnis durch Einsetzen.
- Faßt man die Differentialgleichung

$$a_1(x, y) u_x(x, y) + a_2(x, y) u_y(x, y) = a_0(x, y)$$

auf als die Ableitung einer Funktion  $u(x(t), y(t))$  längs einer Kurve  $(x(t), y(t))$ ,

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy} \frac{dy}{dt} = a_0(x(t), y(t)),$$

so erhält man das System

$$\frac{dx}{dt} = a_1, \quad \frac{dy}{dt} = a_2, \quad \frac{du}{dt} = a_0,$$

dessen Lösungen *charakteristische Kurven*, kurz *Charakteristiken* heißen. Ihre Projektion auf die  $xy$ -Ebene heißen charakteristische Grundkurven. Sie werden durch die ersten beiden Differentialgleichungen beschrieben, die unabhängig von  $u$  lösbar sind.

Was hat eine Charakteristik mit der Lösung der Differentialgleichung zu tun?

Betrachte eine Charakteristik längs einer charakteristischen Grundkurve.

Erkläre das Ergebnis aus Teil a).

**Aufgabe 8:** Wo sind die Differentialgleichungen von welchem Typ?

a)  $y^2 u_{xx} - x u_{yy} + 4xu = \sin u$

b)  $xu_{xx} + xyu_{xy} + yu_{yy} = 4x^2$

c)  $2u_{xy} + 4u_{xz} + 4u_{yz} + 3u_{zz} = \pi^2 e^u$

d) Für  $n * n$  - Matrizen  $T = (t_{ik})$ ,  $A = (a_{ik})$  bestätige man

$$\tilde{a}_{ik} = \sum_{\nu, \mu=1}^n a_{\nu\mu} t_{\nu i} t_{\mu k} \quad \text{für} \quad \tilde{A} = (\tilde{a}_{ik}) = T^T A T$$

**Abgabetermin:** 4.5.04