Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \sin(x) + 2\cos(2x) \qquad x \in \mathbb{R}\cdot \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Fourier–Methode die Lösungen der folgenden Anfangsrandwertaufgaben.

(i)

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 \qquad 0 < x < \pi,\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(4x)}{4} \qquad 0 < x < \pi \\ u(\pi,t) &= u(0,t) = 0 \qquad t > 0. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= 0 \qquad 0 < x < \pi,\ t \in \mathbb{R}^+, \\ v(x,0) &= \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{x}{\pi} \qquad 0 < x < \pi \\ v(0,t) &= 0 \qquad t > 0 \\ v(\pi,t) &= 1 \qquad t > 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie eine Entropielösung der Burger's Gleichung $u_t + uu_x = 0$ zum Zeitpunkt $t = 1$ mit den Anfangsdaten

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \\ 0 & 0 < x \leq 1, \\ 1 & 1 < x. \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + 2xu_x &= tu, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= g(x). \end{aligned}$$

Weisen Sie durch Einsetzen in die Differentialgleichung und in die Anfangsbedingung nach, dass Sie tatsächlich eine Lösung gefunden haben.