Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2003**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes die Lösungen der nachfolgenden Anfangswertaufgaben auf $\mathbb{R}$.

a)

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 \qquad && x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= 3\sin(x) \qquad && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 \qquad && x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= 5\cos(2x) \qquad && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 \qquad && x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= 3\sin(x) - 5\cos(2x) \qquad && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} & u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad x \in (0,1),\ t > 0, \\ & u(x,0) = \sin(\pi x) + 3\sin(3\pi x) + 5\sin(5\pi x) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\sin\left((2k+1)\pi x\right) \\ & u_t(x,0) = 2\sin(2\pi x) + 4\sin(4\pi x) + 6\sin(6\pi x) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} 2k \sin\left(2k\pi x\right) \\ & u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie eine Näherung für die Lösung des folgenden Problems

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx} && x \in (0, 2\pi),\ t > 0,\\
&u(x,0) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ x - 2\pi & \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases}\\
&u_t(x,0) = 0 && x \in (0, 2\pi)\\
&u(0,t) = u(2\pi, t) = 0 && t > 0
\end{aligned}$$

indem Sie die auftretenden Fourierreihen nach dem dritten Term abbrechen. Prüfen Sie nach, welche Rand– bzw. Anfangsbedingung bereits durch diese Näherungslösung erfüllt wird. Skizzieren Sie die Anfangsdaten $u(x,0)$ und die von Ihnen berechnete Approxomation der Lösung für $t = 0$.

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgaben

a)
$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= \frac{x}{\pi} && x \in (0, \pi),\ t > 0,\\
u(x,0) &= \sin(x) && x \in (0, \pi),\\
u(0,t) &= 0 && t > 0\\
u(\pi,t) &= 0 && t > 0.
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
v_t - v_{xx} &= f(x,t) := 1 && x \in (a,b) := (0, \pi),\ t > 0,\\
v(x,0) &= g(x) := x + \sin(x) && x \in (0, \pi),\\
v(0,t) &= \phi_1(t) := t && t > 0\\
v(\pi,t) &= \phi_2(t) := \pi && t > 0.
\end{aligned}$$

Hinweis:Eine Aufgabe diesen Typs kann man z. B. lösen, indem man die Funktion u über

$$v(x,t) = u(x,t) + \phi_1(t) + \frac{x-a}{b-a}\left(\phi_2(t) - \phi_1(t)\right)$$

definiert und in der Aufgabenstellung die v–Ausdrücke durch geeignete u–Ausdrücke ersetzt. Man erhält z.B.

$$v_t = u_t + \dot{\phi}_1 + \frac{x-a}{b-a}\left(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1\right).$$

Beachten Sie das Ergebnis aus Teil a).

Abgabetermin: 08.07.03