Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2003**
Prof. Dr. J. Stuckmeier
Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 1:

a) Leiten Sie die Greensche Funktion für eine Kugel mit Radius R um den Ursprung her.

b) Seien

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \text{Spiegelung von } x = (x_1, x_2) \text{ an der } x_1\text{–Achse},\\ \hat{x} &= \text{Spiegelung von } x \text{ an der } x_2\text{–Achse},\\ \tilde{x} &= \text{Spiegelung von } x \text{ am Nullpunkt.}\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Greensche Funktion für den Quadranten $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ mit Hilfe der Korrekturfunktion

$$\Phi^x(y) := \phi(y - \bar{x}) + \phi(y - \hat{x}) - \phi(y - \tilde{x})$$

konstruiert werden kann.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}\Delta(u) &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^+\\ u(x,0) &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}\\ u_y(x,0) &= \frac{1}{k}\cos(kx) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe eines Produktansatzes. Ist das Problem sachgemäß gestellt?

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie eine Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= 0 \quad \text{für } 1 < x^2 + y^2 < 4, \\ u(x,y) &= 1 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = 1, \\ u(x,y) &= 2 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = 4. \end{aligned}$$

Ist die Lösung eindeutig?

Tip: Polarkoordinaten!

Aufgabe 4:
Lösen Sie für $n = 2$ die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u_{yy}, && x, y \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(0,y,t)) &= u(\pi,y,t) = 0, && \text{für } y \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(x,0,t)) &= u(x,\pi,t) = 0, && \text{für } x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(x,y,0) &= \frac{1}{2}(\sin(2x) + \sin(x))\sin(y) && \text{für } x, y \in (0,\pi). \end{aligned}$$

Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

Abgabetermin: 3.6.03