Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2003**
Prof. Dr. J. Stuckmeier
Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 1:
Transformieren Sie die Differentialgleichung

$$12u_{xx} + 7u_{xy} - 12u_{yy} = 0$$

auf ihre Normalform. Von welchem Typ ist die Differentialgleichung?

Aufgabe 2:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u_{xx} - \frac{2}{3}u_{xy} + u_{yy} + 3u_x = \cos(x).$$

a) Von welchem Typ ist die Differentialgleichung?

b) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf Normalform.

c) Nehmen Sie an, dass Sie die transformierte Differentialgleichung gelöst haben. Wie erhalten Sie dann eine Lösung in den ursprünglichen Koordinaten?

Aufgabe 3:

a) Rotationsinvarianz der Laplacegleichung : Sei u eine Lösung der Laplacegleichung und S eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie, dass dann auch

$$v(y) := u(Sy) \qquad \text{mit } x = Sy \in \mathbb{R}^n$$

die Laplacegleichung löst.

b) Sei u eine im Einheitskreis harmonische Funktion, mit

$$u(x, y) = y; \qquad \text{für} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Bestimmen Sie den Wert von u im Ursprung.

c) Sei u eine Lösung des Cauchy–Problems

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Zeigen Sie , dass dann auch $v(x,t) := u(cx, c^2 t)$ für beliebiges $c > 0$ eine Lösung des Problems ist.

Aufgabe 4:

a) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, && \text{auf } \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) &= \sin(\pi x)\cos(\pi x) && x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= \sin(\pi x) && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) Gegeben sei die Aufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}, \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) = \begin{cases} 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Lösungen für $t = 0, 0.25, 0.5, 1$.

Abgabetermin: 20.5.03