

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 1:

- a) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} e^x u_t + 4uu_x = 0 & x, t \geq 0 \\ u(x, 0) = e^x & x \geq 0 \end{cases}$$

Hinweis : verwenden Sie die Substitution $y = e^x$.

- b) Bestimmen Sie die Entropielösung der Burger's Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangswerten

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

zum Zeitpunkt $t = 2$. Welches neue Problem tritt bei $t = 2$ auf?

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Entropielösung der Burger's Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangswerten

- a)

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$$

bzw.

- b)

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

Aufgabe 3:

Physikalische Prozesse, die durch glatte Lösungen hyperbolischer Differentialgleichungen beschrieben werden, sind im allgemeinem reversibel. Kennt man die Lösungen zu einer bestimmten Zeit, so kann man sie sowohl für spätere als auch für frühere Zeiten angeben.

Bestimmen Sie die Entropielösungen der Burger's Gleichung $u_t + uu_x = 0$ zum Zeitpunkt $t = 1$ mit den Anfangsdaten

$$u_1(x, 0) = \begin{cases} 1 & x < -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - 2x & -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 0 & x > \frac{1}{4} \end{cases}$$

bzw.

$$u_2(x, 0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

Was schließen Sie aus ihren Ergebnissen bezüglich der Reversibilität nicht glatter Lösungen der Burger's Gleichung?

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie den Typ folgender Differentialgleichungen

a) $2u_{xx} - 8u_{xy} + 8u_{yy} + u_y = u$

b) $2u_{xy} + u_{yy} + xu_x = \cos(y)$

c) $3u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$

d) $u_{xx} + e^x u_{yy} + \sin(x)(u_x + u_y) = y + x$

e) $(x^2 + y^2)u_{xx} + 2(x + y)u_{xy} + u_{yy} = 0$

Abgabetermin: 5.5.03