Differentialgleichungen II, WS02, 19.02.2003, (Oberle)

Aufgabe 1:

Man bestimme die Lösung $u(x, y)$ der folgenden Anfangswertaufgabe

$$u_{xy} - \frac{1}{x} u_y = 8x^4 y \,, \quad x, y > 0$$

$$u(x, 1) = x^2 + x^5 \,, \quad x > 0$$

$$u(1, y) = 2y^2 \,, \quad y > 0 \,.$$

Man gehe dazu folgendermaßen vor:

a) Man bestimme eine partikuläre Lösung $u_p(x, y)$ der inhomogenen Differentialgleichung mit dem Ansatz $u_p(x, y) = x^\alpha y^\beta$.

b) Man bestimme die allgemeine Lösung der homogenen und sodann die der inhomogenen Differentialgleichung.

c) Man passe die Lösung aus b) an die vorgegebenen Anfangsdaten an.

Aufgabe 2:

Gegeben sei das folgende Dirichlet-Problem im Kreisring $2 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < 3$ (in Polarkoordinaten):

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \,,$$

$$u(2, \varphi) = \cos\varphi \,,$$

$$u(3, \varphi) = 1 + \frac{65}{144} \sin(2\varphi) \,.$$

Man berechne die Lösung in

a) Polarkoordinaten und

b) kartesischen Koordinaten.

Hinweis: Es darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.