Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2002**
Prof. Dr. H.J. Oberle
Dr. K. Rothe

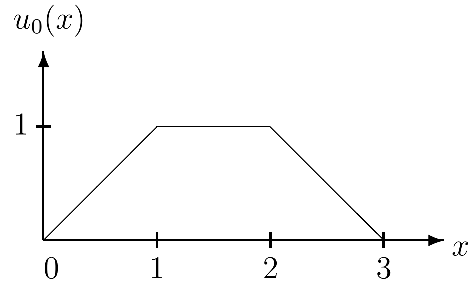
Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17: (alte Klausuraufgabe)

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad \text{für} \quad 0 < x < 3, \quad 0 < t \le T\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 3\,, \\ u(0,t) &= 0 = u(3,t) \quad \text{für} \quad 0 \le t \le T\,. \end{aligned}$$



Aufgabe 18:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 1 \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < t\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) := x + \sin x \quad \text{für} \quad 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) &= t\,, \quad u(\pi,t) = \pi \quad \text{für} \quad 0 \le t\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 19: (Anschlagen einer Saite):

Man löse die folgende Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung ($c > 0$):

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t$$
$$w(0,t) = w(1,t) = 0, \quad t \ge 0$$
$$w(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1$$
$$w_t(x,0) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{20} \le x \le \frac{1}{10} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

unter Verwendung der allgemeinen Lösung $u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$.

Aufgabe 20:

Man löse die folgende Anfangswertaufgabe für die dreidimensionale Wellengleichung:

$$u_{tt} - c^2 \Delta_3 u = 0, \quad \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t \ge 0$$
$$u(\mathbf{x}, 0) = 0$$
$$u_t(\mathbf{x}, 0) = x^2 + xy + z^2$$

Hinweis: Man verwende die Liouvilleschen Lösungsformel

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi} \int\limits_S u_0(\boldsymbol{x} + ct\boldsymbol{n})\, do \right) + \frac{t}{4\pi} \int\limits_S v_0(\boldsymbol{x} + ct\boldsymbol{n})\, do$$

mit der Einheitssphäre S im $\mathbb{R}^3$ und dem Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ auf S.

Abgabetermin: 11.6. und 14.6.02