Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2002**
Prof. Dr. H.J. Oberle
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

a) Mit Hilfe des Produktansatzes $u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$ bestimme man Lösungen von $u_{xx} + 2u_{xy} + u_y = 0$.

b) Man vereinfache die Differentialgleichung $u_{xy} = au_x + bu_y + cu$ mit beliebigen $a, b, c \in \mathbb{R}$ durch eine Tranformation der Form $u(x,y) = v(x,y) \cdot \exp(\alpha x + \beta y)$ und geschickter Wahl von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und bestimme anschließend Lösungen mit Hilfe eines Produktansatzes bezüglich v.

Aufgabe 14:

Man berechne durch einen Separationsansatz der Form $u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ eine Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, & x \in (0,1), \quad y > 0, \\
u(x,0) &= \frac{2}{n} \sin 3n\pi x\,, & x \in [0,1], \\
u_y(x,0) &= 0\,, & \\
u(0,y) &= 0\,, & y \geq 0\,, \\
u(1,y) &= 0\,. &
\end{aligned}$$

und begründe damit, warum keine stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten vorliegt, die Aufgabe also nicht sachgemäß gestellt ist.

Aufgabe 15:

a) Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}\,, & x &\in (0,1), \quad 0 < t < 1, \\ u(x,0) &= g(x)\,, & x &\in [0,1]\,, \\ u(x,1) &= h(x)\,, & x &\in [0,1]\,, \\ u(0,t) &= 0\,, & t &\in [0,1]\,, \\ u(1,t) &= 0\,, & t &\in [0,1]\,, \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen g und h, die noch die Verträglichkeitsbedingungen $g(0) = h(0) = g(1) = h(1) = 0$ erfüllen.

Man zeige, dass bei beliebiger Wahl von g und h keine Lösung existiert, die Aufgabe also nicht sachgemäß gestellt ist.

b) Für den Kreis $x^2 + y^2 \leq 4$ löse man das folgende innere Dirichletsche Problem:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad r < 2$$

$$u(2,\varphi) = \cos^2\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Man gebe die Lösung auch in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 16:

a) Sei $u(\boldsymbol{x})$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ harmonisch, $\overline{K}_R(\boldsymbol{0}) \subset G$ und gelte $u(\boldsymbol{x}) \geq 0$ für $||\boldsymbol{x}|| = R$. Man beweise die **Abschätzung nach Harnack** für $||\boldsymbol{x}|| < R$:

$$\frac{R - ||\boldsymbol{x}||}{R + ||\boldsymbol{x}||} \cdot u(0) \;\leq\; u(\boldsymbol{x}) \;\leq\; \frac{R + ||\boldsymbol{x}||}{R - ||\boldsymbol{x}||} \cdot u(0).$$

Hinweis: Man verwende die Abschätzung $||\boldsymbol{y}|| - ||\boldsymbol{x}|| \leq ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|| \leq ||\boldsymbol{y}|| + ||\boldsymbol{x}||$ sowie die Poissonsche Integralformel.

b) Man folgere hieraus den **Satz von Liouville**:

Jede beschränkte, auf ganz $\mathbb{R}^2$ harmonische Funktion ist konstant.

Abgabetermin: 28.5. und 31.5.02