

Die Bearbeitung der Aufgaben **muss** in deutsch erfolgen. Ausarbeitungen in anderen Sprachen werden nicht bewertet.

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 18 & -8 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechne

- a) die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems,
- b) eine spezielle Lösung des zugehörigen inhomogenen Systems,
- c) dann die Lösung der Anfangswertaufgabe und
- d) alle Gleichgewichtspunkte des zu Grunde liegenden inhomogenen Differentialgleichungssystem, untersuche diese auf Stabilität und gebe den Typ an.

Aufgabe 2:

- a) Man berechne die allgemeine Lösung von

$$-1 - 2x + y \cos x + (2 + \sin x)y' = 0.$$

- b) In einer Variationsaufgabe ist das Funktional

$$I[y] = \int_0^{\pi/4} ((y')^2 - 4y^2 + 2) dt$$

gegeben für alle C^1 -Funktionen y mit $y(0) = 0$ und $y(\pi/4) = 1$.

- (i) Man stelle die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf,
- (ii) berechne die reelle Lösung der zugehörigen Randwertaufgabe und
- (iii) berechne für die Lösung aus (ii) den Wert des Funktionals $I[y]$.

Hinweis:

$$\int \sin^2(at) dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2at), \quad \int \cos^2(at) dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2at)$$