Prof. Dr. Jens Struckmeier
Martin Hamm

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = y, \qquad y(0) = 1.$$

Der Wert $y(2)$ soll nun numerisch bestimmt werden (exakter Wert: $\exp(2) = 7.389...$).

a) Nähern Sie den Wert $y(2)$ mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren, dem Verfahren von Heun und dem modifizierten Euler-Verfahren. Wählen sie jeweils die (äquidistante) Schrittweite $h = 1$ und starten Sie mit $t_0 = 0, Y_0 = 1$. Machen Sie außerdem jeweils eine Zeichnung, aus der hervorgeht, wodurch die Fortschreiterichtungen bestimmt sind (wie in Abb.24.2, Abb.24.3, Abb.24.4 im Buch). Warum erhält man in diesem Fall beim Verfahren von Heun und beim modifizierten Euler-Verfahren denselben Wert?

b) Geben Sie für Näherungen $(t_j, Y_j), (t_{j+1}, Y_{j+1})$ und h die Lösung $z(t)$ der Anfangswertaufgabe

$$z'(t) = z, \qquad z(t_j) = Y_j$$

und den lokalen Diskretisierungsfehler $\tau(t_j, Y_j, h)$ an. Zeichnen Sie dann jeweils die Lösung $z(t; t_0, Y_0)$ für den Bereich $[t_0, t_1]$ und die Lösung $z(t; t_1, Y_1)$ für den Bereich $[t_1, t_2]$ für die Werte aus a) in Ihre Bilder. Wo sieht man jetzt die lokalen Diskretisierungsfehler?

c) Der Wert $y(2)$ soll noch einmal mit dem Verfahren von Heun genähert werden, jedoch sollen die lokalen Diskretisierungsfehler nun nicht wesentlich mehr als 0.25 betragen. Dieses soll mit dem Algorithmus 24.2.19 im Buch geschehen, bei dem auch die (nicht mehr äquidistante) Schrittweite entsprechend gesteuert wird. Verwenden Sie für $Y(t_{j+1}; h_{\text{alt}})$ und $\hat{Y}(t_{j+1}; h_{\text{alt}})$ die durch 24.2.20 und das Koeffiziententableau 24.2.21a) gegebene Bestimmung (aufgrund der mehrfach durchzuführenden Berechnung ist es sinnvoll, zunächst $Y(t_{j+1}; h_{\text{alt}})$ und $\hat{Y}(t_{j+1}; h_{\text{alt}})$ durch Formeln auszudrücken). Setzen Sie $\text{TOL} = 0.25$ (=tolerierter Diskretisierungsfehler) und $p = 2$ (=Ordnung des Verfahrens) und starten Sie mit $h_{\text{alt}} = 1$. Beachten Sie, dass Sie nach dem Schritt $h_{\text{alt}} := h_{\text{neu}}$ den Wert h_{alt} durch $2 - t_j$ ersetzen müssen, sofern $t_j + h_{\text{alt}} > 2$ gilt (Integrationsende).

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass das modifizierte Euler-Verfahren die Ordnung 2 hat.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$y''(x) = 2(y'(x))^{\frac{3}{2}}, \qquad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(1) = 1. \tag{$*$}$$

a) Berechnen Sie (analytisch) die Lösung $y(x, s)$ der zugehörigen Anfangswertaufgabe $y(0) = 0$ und $y'(0) = s > 0$, und bestimmen Sie die Lage der Singularität $x_\infty(s)$ von $y(x, s)$. Für welche $s > 0$ gilt $x_\infty \in [0, 1]$?

b) Berechnen Sie (analytisch) die Lösung $y(x, s^*)$ des Randwertproblems $(*)$ und zeichnen Sie sie.

c) Zur numerischen Lösung von $(*)$ soll das einfache Schießverfahren verwendet werden. Stellen Sie das zugehörige Nullstellenproblem

$$\tilde{F}(s) = y(1, s) - 1 = 0$$

auf, vereinfachen Sie es zu $F(s) = as^2 + bs + c = 0$ und bestimmen Sie alle Anfangswerte s_0, für die die Newton-Iteration für $F(s) = 0$ eine gegen s^* konvergente Folge liefert.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$y' = y^2, \qquad y(a) + y(b) = c, \qquad (a, b, c \in \mathbb{R},\ a < b),$$

die mit der Mehrzielmethode gelöst werden soll. Dazu soll die Intervallunterteilung

$$a \ = \ t_1 \ < \ t_2 \ < \ t_3 \ < \ t_4 \ = \ b$$

verwendet werden. Bestimmen Sie (analytisch) die Funktion $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^k)$ und die Matrix $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^k)$, die man für das Newton-Verfahren (18.4.3 und 18.4.9 im Buch) benötigt.