Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2006/07**
Prof. Dr. Jens Struckmeier
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7

Aufgabe 1: (Klausur 2005/2003)

a) Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ der von der Kurve

$$\mathbf{c} : [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{c}(t) = \left(1-t^2, t(1-t^2)\right)^{\mathrm{T}},$$

berandete, kompakte, bzgl. beider Koordinaten projizierbare Bereich.
Berechnen Sie $\int_K \operatorname{rot} \mathbf{f}(x,y)\, \mathrm{d}(x,y)$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{f}(x,y) = (y,\, 1-x)^{\mathrm{T}}\ .$$

b) Sei f das Vektorfeld $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$, c_1 die Kurve mit der Parametrisierung

$$c_1(t) = (t, \sin(t)) \qquad t \in [0,\pi]$$

und c_2 der mathematisch positiv orientierte Rand des Rechtecks

$$R = \{(x,y)\ :\ x \in [0,1],\ y \in [0,2]\} \ = \ [0,1] \times [0,2] \cdot$$

(i) Besitzt f ein Potential?

(ii) Berechnen Sie für $i = 1,2$ die Kurvenintegrale

$$\int_{c_i} f(x,y)\, d(x,y) \cdot$$

(iii) Berechnen Sie den Fluß von f aus R heraus.

Aufgabe 2: Gegeben sei das Kraftfeld $\mathbf{f}(x,y,z) := (2xz^3 + 6y, 6x + 2yz, 3x^2z^2 + \alpha y^2)^T$.

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{f}$ ein konservatives Kraftfeld?

b) Berechnen Sie mit dem in Teil a) errechneten Wert von α die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve

$$c(t) = \left(\cos(\pi t/2), t, (4-2t)e^{(t-1)^2}\right)^T \qquad t \in [1,2]$$

von $A = (0,1,2)^T$ nach $B = (-1,2,0)$ zu bewegen.

Aufgabe 3:

a) Berechnen Sie die Oberfläche von

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \,\leq\, R^2, z \,\leq H \right\}$$

wobei H und R vorgegebene reelle Zahlen mit $0 \leq H \leq R$ seien.

b) Eine Parkhausauffahrt sei beschrieben durch

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ \phi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,: 0 \,\leq\, \phi \,\leq 2\pi,\, 4 \leq r \leq 8 \right\}.$$

Berechnen Sie die Oberfläche der Auffahrt.

Hinweis : $\displaystyle\int \sqrt{1+r^2}dr = \frac{1}{2}\left[r\sqrt{1+r^2} \,+\, \ln(r + \sqrt{1+r^2}) \right]$

Aufgabe 4: Gegeben seien das Flächenstück

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, y^2 + z^2 \,\leq\, 4\,,\, x = y^2 + z^2 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \,+\, y^2 \,+\, z^2 \\ y \,+\, x \,-\, z \\ z \,+\, x \,-\, y \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\displaystyle\int_F f(x,y,z)\,do$ direkt.

b) Wie groß ist der Fluß von f durch die Oberfläche des Körpers

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, y^2 + z^2 \,\leq\, 4\,,\, y^2 + z^2 \,\leq\, x \,\leq\, 4 \right\} ?$$

c) Berechnen Sie das Oberflächenintegral aus Teil a) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes und Teil b).

Abgabetermine: 05.02. – 09.02.2007