Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2006/07**
Prof. Dr. Jens Struckmeier
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

Veranschaulichen Sie sich die folgenden Abbildungen $f : [-2,2]$ x $[-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ indem Sie Skizzen der Flächen $(x, y, f(x,y))$ erstellen und jeweils einige Höhenlinien

$f^{-1}(C) := \{(x,y)^{\mathrm{T}} : f(x,y) = C\}$

von f für verschiedene Werte von C skizzieren.

Benutzen Sie ggf. entsprechende Programme z.B. die MATLAB–Funktionen *meshgrid, mesh, surf* und *contour.*

a) $f(x,y) = 3x - 5y,$ b) $f(x,y) = \exp(-(x^2 + y^2)),$

c) $f(x,y) = \cos(2\pi y)\sin(\pi x)$ d) $f(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x+1).$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie zu den Funktionen aus Aufgabe 1) die Gradientenfelder analytisch. Skizzieren Sie die Gradientenfelder (z.B. mit Hilfe der MATLAB-Funktionen *meshgrid, contour, gradient* und *quiver*). Versuchen Sie anhand Ihrer Beobachtungen (d.h. ohne Beweis) eine Vermutung zu äußern, wie die Richtung des Gradienten in einem festen Punkt mit der Richtung der Höhenlinie durch diesen Punkt zusammenhängt.

Aufgabe 3:

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktionen:

$$f(x,y,z) := xyz \sin(x+y+z),$$

$$g(x,y,z) := \frac{\cos^2(x)e^y}{z}$$

b) Die *Tangentialebene* an den Graphen einer differenzierbaren Funktion $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $(x^0, y^0) \in D_f \subset \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$z = f(x^0, y^0) + f_x(x^0, y^0)\,(x - x^0) + f_y(x^0, y^0)\,(y - y^0)$$

Man bestimme die Tangentialebene von $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $\qquad f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ im Punkt $(x^0, y^0) = (-1, 1)$.

Aufgabe 4:

Die Funktion

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x + ct)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x - ct)\right)\right]$$

beschreibt näherungsweise die Auslenkung des Punktes $x \in [0, L]$ einer schwingenden Saite der Länge L zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit den Anfangsdaten $u(x,0) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$.

a) Bestimmen Sie die Randdaten $u(0,t)$ und $u(L,t)$.

b) Skizzieren Sie die Form der Saite für $t = 0, \frac{L}{6c}, \frac{L}{4c}, \frac{L}{3c}, \frac{L}{2c}, \frac{L}{c}$

c) Zeigen Sie, dass u die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

erfüllt.

Abgabetermine: 30.10.-3.11.2006