Normalformen von Quadriken

Klassifizierung

1 Quadriken

Die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^n$, die eine quadratische Gleichung der Form

$$q(\vec{x}) = x^T\, A\, x + b^T\, x + c = 0$$

erfüllen, heißt eine Quadrik.

2 Normalformen von Quadriken im $\mathbb{R}^2$

2.1 Rang A = 2 (alle Eigenwerte $\neq 0$)

Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

leere Menge

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

Punkt

$$x^2 + a^2\, y^2 = 0$$

Geradenpaar

$$x^2 - a^2\, y^2 = 0$$

2.2 Rang A = 1 (ein Eigenwert = 0)

Parabel

$$x^2 - 2\,p\,y = 0$$

Doppelgerade

$$x^2 = 0$$

parallele Geraden

$$x^2 - a^2 = 0$$

leere Menge

$$x^2 + a^2 = 0$$

2.3 Rang A = 0 (nur lineare Terme)

allgemeine Gerade

$$b_1\,x + b_2\,y + c = 0$$

3 Normalformen von Quadriken im $\mathbb{R}^3$

3.1 Rang A = 3 (alle Eigenwerte $\neq$ 0)

Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

leere Menge

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

einschaliges Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

zweischaliges Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

Punkt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

elliptischer Kegel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

3.2 Rang A = 2 (ein Eigenwert = 0)

elliptisches Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\,p\,z = 0$$

hyperbolisches Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2\,p\,z = 0$$

leere Menge

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

elliptischer Zylinder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

hyperbolischer Zylinder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

Gerade

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Ebenenpaar mit Schnittgerade

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

3.3 Rang A = 1 (zwei Eigenwerte = 0)

parabolischer Zylinder

$$x^2 - 2\,p\,z = 0$$

paralleles Ebenenpaar

$$x^2 - a^2 = 0$$

leere Menge

$$x^2 + a^2 = 0$$

Ebene

$$x^2 = 0$$

3.4 Rang A = 0 (nur lineare Terme)

allgemeine Ebenengleichung

$$b_1\,x + b_2\,y + b_3\,z + c = 0$$