Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2004/05**
Prof. Dr. H. J. Oberle

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7

Aufgabe 25:

a) Überprüfen Sie die notwendigen Bedingungen für die Existenz eines Potentials $\varphi(\boldsymbol{x})$ zum Kraftfeld $\boldsymbol{K} := (2xz^3 + 6y, 6x + 2yz, 3x^2z^2 + y^2)^{\mathrm{T}}$ und berechnen Sie φ gegebenenfalls. Ermitteln sie die Arbeit, die bei der Bewegung eines Massenpunktes von $A = (1, -1, 1)$ nach $B = (2, 1, -1)$ in diesem Kraftfeld verrichtet wird.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ für das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := (x^2y, x)^{\mathrm{T}}$, wobei $\mathbf{c}$ den im positiven Sinn durchlaufenen Rand des Dreiecks $\Delta : (0,0), (1,0), (1,2)$ bezeichne. Bestätigen Sie für dieses Beispiel den Integralsatz von Green.

Aufgabe 26:

a) Bestimmen Sie die Oberfläche des Paraboloidstückes

$$P := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 2,\ z = 2 - (x^2 + y^2)\}.$$

b) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := (xz, yz, yz^2)^{\mathrm{T}}$ durch das Kugelschalenstück $K := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 \le 1,\ z \ge 0\}$.
Hinweis: Die Flächennormale der Kugel weise nach außen. Verwenden Sie zur Parametrisierung Polarkoordinaten für (x, y).

Aufgabe 27:

Gegeben sei der Körper $K := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1,\ x^2 + y^2 \le z^2\}$ und das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := (x^3 + yz, y^3 + x, z^2)^{\mathrm{T}}$.

a) Skizzieren Sie K und geben Sie Parametrisierungen für die beiden glatten Flächenstücke F_1 und F_2 an, die K beranden.

b) Berechnen Sie das Volumenintegral $\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{x}$ sowie die einzelnen Flüsse von $\boldsymbol{f}$ durch die Flächenstücke F_1 und F_2. Bestätigen sie damit für dieses Beispiel den Gaußschen Integralsatz.

Aufgabe 28:

a) Zeigen Sie: Ist $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ ein divergenzfreies C^1–Vektorfeld, so wird zu einem (festen) Punkt $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ durch

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) := \left(\int_{a_3}^{z} f_2(x,y,\zeta)\, d\zeta - \int_{a_2}^{y} f_3(x,\eta,a_3)\, d\eta,\ - \int_{a_3}^{z} f_1(x,y,\zeta)\, d\zeta,\ 0 \right)^{\mathrm{T}}$$

ein so genanntes *Vektorpotential* $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ definiert, d.h. es gilt $\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f}$.

b) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\boldsymbol{f} := (x(z^2-y^2), y(x^2-z^2), z(y^2-x^2))^{\mathrm{T}}$ divergenzfrei ist und berechnen Sie ein Vektorpotential zu $\boldsymbol{f}$.

c) Man verwende den Stokesschen Integralsatz zur Berechnung des Flusses von $\boldsymbol{f}$ durch die obere Kugelschale

$$K := \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1,\ z = 1 + \sqrt{1-x^2-y^2} \}.$$

Abgabetermine: 31. 1. – 4. 2. 2005 **vor** der Übung.