Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17:

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f(x,y,z) := x+y+z$ unter der Nebenbedingung $x^4+y^4+z^4=1$. Wenden Sie dazu die Lagrange-Multiplikatorenregel an, überprüfen Sie die Regularitätsbedingung sowie die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung.

Aufgabe 18:

Zu bestimmen sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2$ unter den Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) := x^2+y^2-z^2 = 0$ und $g_2(x,y,z) := x+2\sqrt{2}y+z-1 = 0$. Gehen Sie hierzu folgendermaßen vor:

a) Zeigen Sie, dass alle zulässigen Punkte die Regularitätsbedingung erfüllen.

b) Bestimmen Sie alle stationären Punkte $\boldsymbol{x}^{(k)}$ der Lagrange-Funktion $F(\boldsymbol{x}, \lambda, \mu)$.

c) Untersuchen Sie die Hesse-Matrix $HF(\boldsymbol{x}^{(k)})$ auf ihre Definitheit auf dem Tangentialraum $TG(\boldsymbol{x}^{(k)})$.

Aufgabe 19:

Zu bestimmen ist der minimale und maximale Abstand des Punktes $P = (1,3,4)$ vom Ellipsoid $4x^2+4y^2+z^2 \le 16$.

Reduzieren Sie das Problem durch Anwendung der Lagrange-Multiplikatorenregel auf die Nullstellenbestimmung für eine Polynom vierten Grades. Bestimmen Sie die Nullstellen mit Hilfe des Newton–Verfahrens und geben Sie die Punkte auf dem Ellipsoid mit extremalem Abstand an.

Aufgabe 20:

Zur Bestimmung des Minimums der Funktion

$$z = f(x,y) := x^2 + 2y^2 - 0.1\cos(x+y) - 3x + 2y$$

soll das Newton–Verfahren auf die Funktion $F(x,y) := \nabla f(x,y)^T$ angewendet werden.

a) Berechnen Sie $F(x,y)$ und die Jacobi-Matrix $JF(x,y)$.

b) Stellen Sie das Newton–Verfahren auf und führen Sie den ersten Iterationsschritt per Handrechnung durch; Startvektor: $(x^0, y^0) = (0,0)$.

c) Führen Sie die Iteration numerisch durch und berechnen Sie damit die Lösung auf (wenigstens) zehnstellige Genauigkeit.

Abgabetermine: 3. 1. – 7. 1. 2005 **vor** der Übung.

Ein frohes Weihnachtsfest
und ein gutes neues Jahr 2005 !